Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

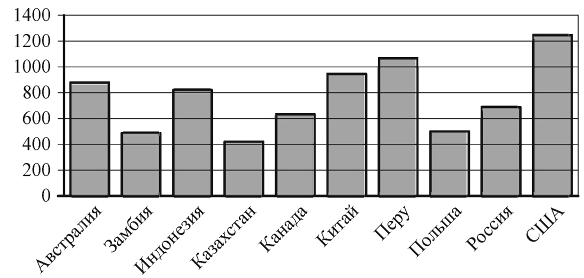
Желаем успеха!

Часть 1

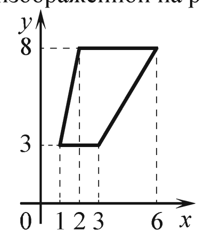
Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Одна таблетка лекарства весит 70 мг и содержит 4% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,05 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте пяти месяцев и весом 8 кг в течение суток?

B2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимала Канада?



B3 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



B4 Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P, показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

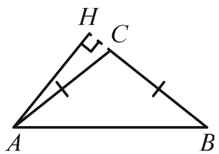
$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических чайников. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей электрических чайников.

Модель чайника	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4000	1	0	0
Б	4500	4	3	0
В	4400	2	3	0
Г	4200	2	3	4

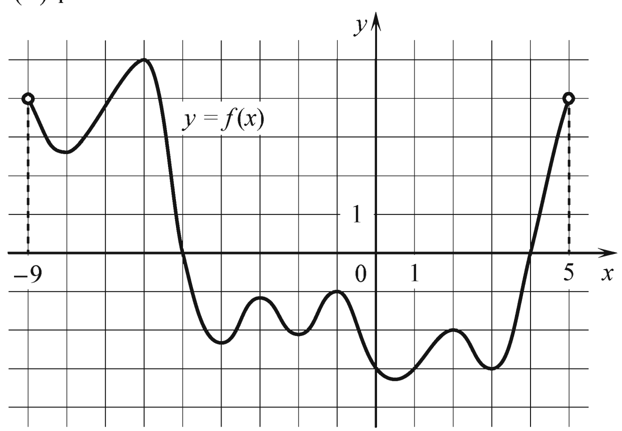
B5 Найдите корень уравнения $6^{-6+x} = 36$.

B6 В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 20$, высота AH равна 8. Найдите синус угла BAC.

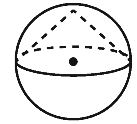


B7 Найдите значение выражения $\log_2 240 - \log_2 3{,}75$.

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

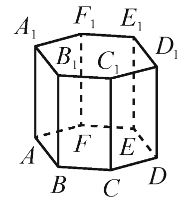


B9 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.



B10 Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

B11 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки D, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 2.



B12 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 217 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c \cdot \dfrac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 12 м/с. Ответ выразите в МГц.

B13 Байдарка в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 20 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт А в 16:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки равна 2 км/ч.

B14 Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{x^2 + 441}{x}$ на отрезке $[2; 32]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3-x} \dfrac{x+4}{(x-3)^2} \geq -2, \\ x^3 + 6x^2 + \dfrac{21x^2 + 3x - 12}{x-4} \leq 3. \end{cases}$$

C4 Окружности радиусов 2 и 3 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30°$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$$

имеет единственный корень.

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

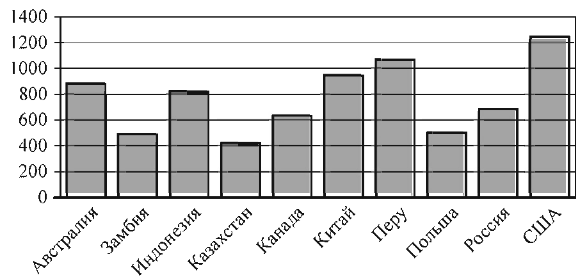
Желаем успеха!

Часть 1

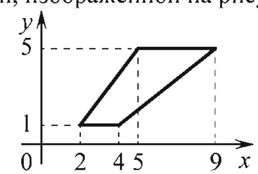
Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 5% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 0,4 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте трёх месяцев и весом 5 кг в течение суток?

B2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимала Россия?



B3 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



B4 Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P, показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

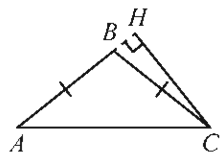
$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей пылесосов. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей пылесосов.

Модель пылесоса	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4700	2	0	1
Б	5500	4	0	4
В	4600	2	4	1
Г	4900	3	0	1

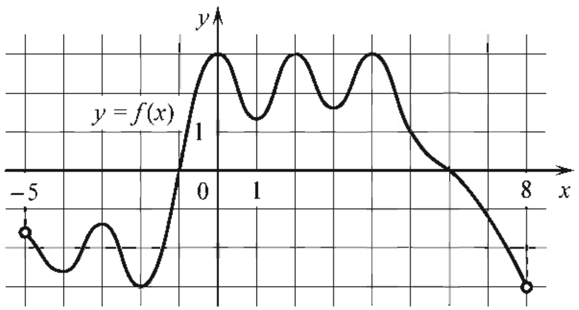
B5 Найдите корень уравнения $2^{9+x} = 8$.

B6 В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 16$, высота CH равна 4. Найдите синус угла ACB.

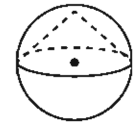


B7 Найдите значение выражения $\log_5 312{,}5 - \log_5 2{,}5$.

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 8)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

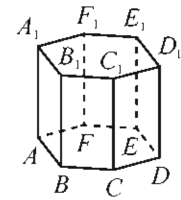


B9 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $52\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.



B10 Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 спортсменов, среди которых 17 спортсменов из России, в том числе Денис Полянкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Денис Полянкин будет играть с каким-либо спортсменом из России.

B11 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, B_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 6.



B12 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 598 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c \cdot \dfrac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 5 м/с. Ответ выразите в МГц.

B13 Катер в 10:00 вышел из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 4 часа, катер отправился назад и вернулся в пункт А в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость катера, если известно, что скорость течения реки равна 2 км/ч.

B14 Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{x^2 + 81}{x}$ на отрезке $[4; 20]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1 а) Решите уравнение $21^{-\sin x}=3^{-\sin x}\cdot 7^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

С2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 5. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку A и середину ребра MC параллельно прямой BD.

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{4-x}\dfrac{x+6}{(x-4)^6}\ge -6,\\ x^3+9x^2+\dfrac{40x^2+2x-10}{x-5}\le 2.\end{cases}$$

С4 Окружности радиусов 2 и 10 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1=22{,}5°$.

С5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax+\sqrt{-8-6x-x^2}=2a+1$$

имеет единственный корень.

С6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 10, 12, 13, 22, 23, 24, 25, 34, 35, 36, 37, 46, 47, 49, 59.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

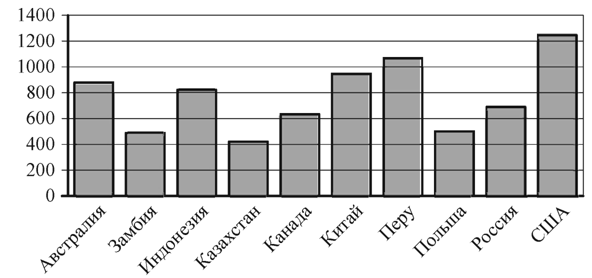
Желаем успеха!

Часть 1

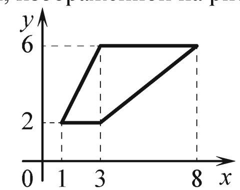
Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 5% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте четырёх месяцев и весом 7 кг в течение суток?

B2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимала Австралия?



B3 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



B4 Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P, показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

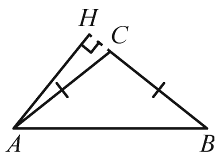
$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических мясорубок. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей электрических мясорубок.

Модель мясорубки	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	3600	2	4	0
Б	3900	2	0	1
В	4100	1	4	4
Г	3700	3	4	3

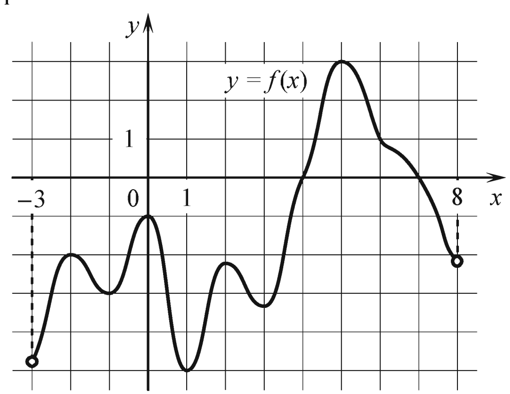
B5 Найдите корень уравнения $4^{-7+x} = 64$.

B6 В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 10$, высота AH равна 3. Найдите синус угла BAC.

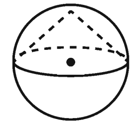


B7 Найдите значение выражения $\log_4 96 - \log_4 1{,}5$.

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

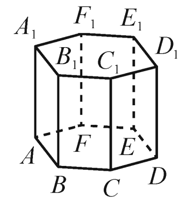


B9 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $23\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.



B10 Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 бадминтонистов, среди которых 16 спортсменов из России, в том числе Игорь Чаев. Найдите вероятность того, что в первом туре Игорь Чаев будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

B11 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, D_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 9.



B12 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 299 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c \cdot \dfrac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 5 м/с. Ответ выразите в МГц.

B13 Лодка в 8:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 2 часа, лодка отправилась назад и вернулась в пункт А в 20:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки равна 2 км/ч.

B14 Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{x^2 + 484}{x}$ на отрезке $[2; 33]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1 а) Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

С2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5-x} \dfrac{x+4}{(x-5)^{10}} \geq -10, \\ x^3 + 8x^2 + \dfrac{50x^2 + x - 7}{x-7} \leq 1. \end{cases}$$

С4 Окружности радиусов 3 и 5 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 15°$.

С5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

С6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

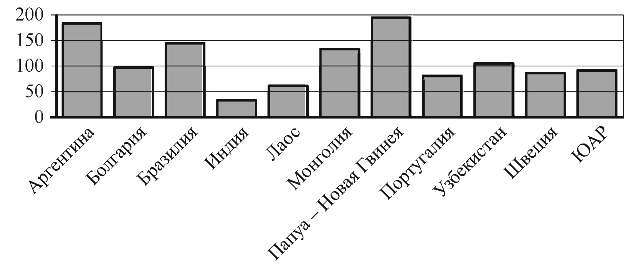
Желаем успеха!

Часть 1

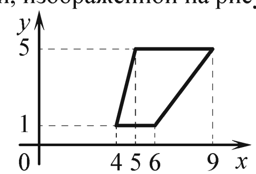
Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 9% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,35 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте четырёх месяцев и весом 8 кг в течение суток?

B2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа – Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимал Лаос?



B3 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



B4 Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P, показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

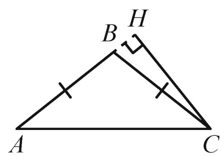
$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей вафельниц. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей вафельниц.

Модель вафельницы	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4100	3	2	4
Б	4700	0	2	2
В	5500	3	1	1
Г	5400	0	2	0

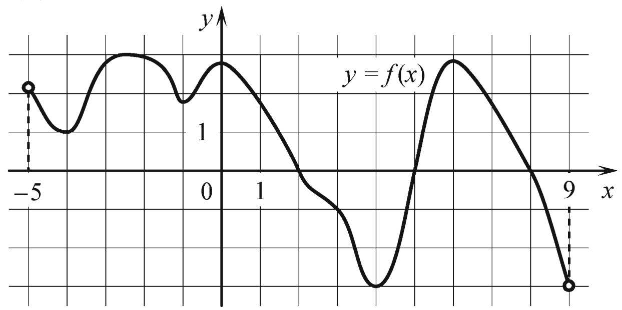
B5 Найдите корень уравнения $4^{-5+x} = 64$.

B6 В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 14$, высота CH равна 7. Найдите синус угла ACB.

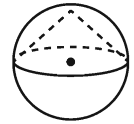


B7 Найдите значение выражения $\log_6 135 - \log_6 3{,}75$.

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

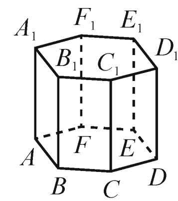


B9 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $51\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.



B10 Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 спортсменов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Георгий Бочкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Георгий Бочкин будет играть с каким-либо спортсменом из России.

B11 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, D_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 8, а боковое ребро равно 6.



B12 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 558 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 12 м/с. Ответ выразите в МГц.

B13 Байдарка в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 20 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт А в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки равна 3 км/ч.

B14 Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2 + 25}{x}$ на отрезке $[-12; -1]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $14^{\cos x} = 2^{\cos x} \cdot 7^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 4, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{7-x} \dfrac{x+3}{(x-7)^8} \geq -8, \\ x^3 + 6x^2 + \dfrac{40x^2 + 3x - 24}{x-8} \leq 3. \end{cases}$$

C4 Окружности радиусов 5 и 8 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 15°$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-3 - 4x - x^2} = 3a + 1$$

имеет единственный корень.

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 29.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

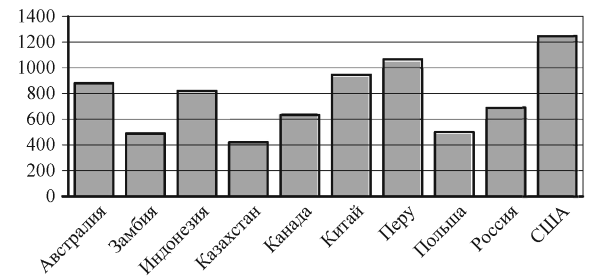
Желаем успеха!

Часть 1

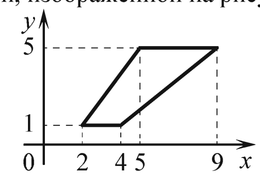
Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 9% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,35 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте четырёх месяцев и весом 8 кг в течение суток?

B2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимала Австралия?



B3 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



B4 Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P, показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

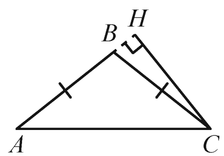
$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических чайников. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей электрических чайников.

Модель чайника	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4000	1	0	0
Б	4500	4	3	0
В	4400	2	3	0
Г	4200	2	3	4

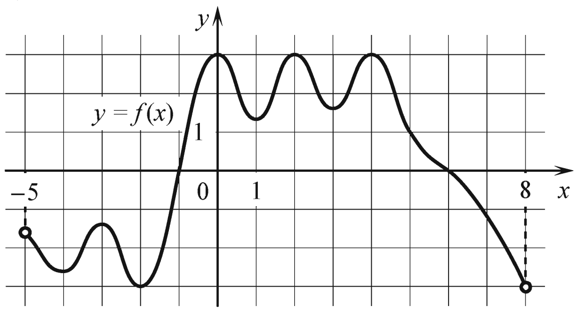
B5 Найдите корень уравнения $4^{-5+x} = 64$.

B6 В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 15$, высота CH равна 6. Найдите синус угла ACB.

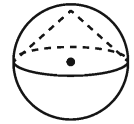


B7 Найдите значение выражения $\log_6 135 - \log_6 3{,}75$.

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 8)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

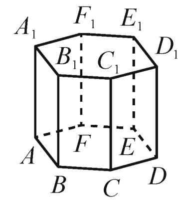


B9 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $26\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.



B10 Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шахматистов, среди которых 5 спортсменов из России, в том числе Кирилл Черноусов. Найдите вероятность того, что в первом туре Кирилл Черноусов будет играть с каким-либо шахматистом из России.

B11 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки D, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 2.



B12 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 299 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c \cdot \dfrac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 5 м/с. Ответ выразите в МГц.

B13 Катер в 10:00 вышел из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 4 часа, катер отправился назад и вернулся в пункт А в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость катера, если известно, что скорость течения реки равна 2 км/ч.

B14 Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{x^2 + 9}{x}$ на отрезке $[-11; -1]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $12^{\sin x} = 3^{\sin x} \cdot 4^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 15, а боковые рёбра равны 16. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и середину ребра MB параллельно прямой AC.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x} \dfrac{x+6}{(x-4)^6} \geq -6, \\ x^3 + 9x^2 + \dfrac{40x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2. \end{cases}$$

C4 Окружности радиусов 3 и 9 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30°$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

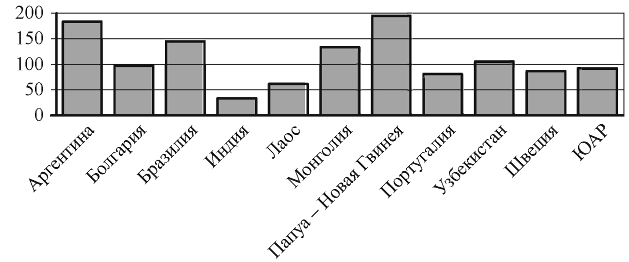
Желаем успеха!

Часть 1

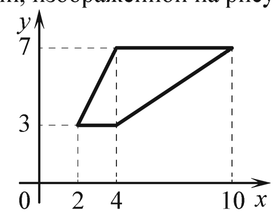
Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Одна таблетка лекарства весит 30 мг и содержит 5% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 0,75 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте пяти месяцев и весом 8 кг в течение суток?

B2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа – Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимала Бразилия?



B3 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



B4 Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P, показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

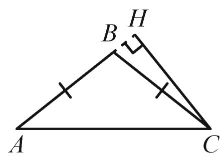
$$R = 4\left(2F + 2Q + D\right) - 0{,}01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей тостеров. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей тостеров.

Модель тостера	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	5500	0	0	4
Б	5400	0	1	2
В	4800	4	4	1
Г	6000	4	4	1

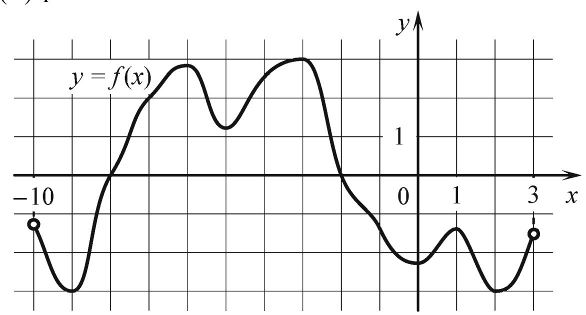
B5 Найдите корень уравнения $2^{-3+x} = 8$.

B6 В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 15$, высота CH равна 6. Найдите синус угла ACB.

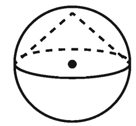


B7 Найдите значение выражения $\log_6 45 - \log_6 7{,}5$.

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10; 3)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

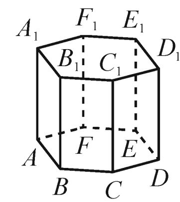


B9 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $26\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.



B10 Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 46 шахматистов, среди которых 10 спортсменов из России, в том числе Дмитрий Тоснин. Найдите вероятность того, что в первом туре Дмитрий Тоснин будет играть с каким-либо шахматистом из России.

B11 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, D_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 5, а боковое ребро равно 9.



B12 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 186 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c \cdot \dfrac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 12 м/с. Ответ выразите в МГц.

B13 Байдарка в $9:00$ вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 45 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт А в $16:00$ того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки равна 1 км/ч.

B14 Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{x^2 + 9}{x}$ на отрезке $[-11; -1]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $20^{\cos x}=4^{\cos x}\cdot 5^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};-3\pi\right]$.

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 15, а боковые рёбра равны 16. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и середину ребра MB параллельно прямой AC.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{3-x}\dfrac{x+7}{(x-3)^4}\geq -4,\\ x^3+8x^2+\dfrac{18x^2+5x-15}{x-3}\leq 5.\end{cases}$$

C4 Окружности радиусов 3 и 9 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1=30°$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax+\sqrt{-27-12x-x^2}=7a+3$$

имеет единственный корень.

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

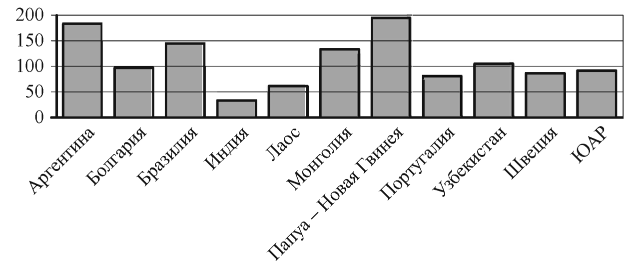
Желаем успеха!

Часть 1

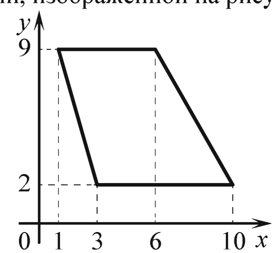
Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Одна таблетка лекарства весит 40 мг и содержит 5% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,25 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте трёх месяцев и весом 8 кг в течение суток?

B2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа – Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимала Монголия?



B3 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



B4 Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P, показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

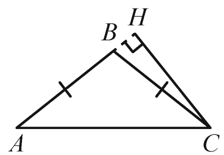
$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических блендеров. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей электрических блендеров.

Модель блендера	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	5400	4	2	4
Б	3600	3	0	4
В	4200	1	2	3
Г	4800	3	4	2

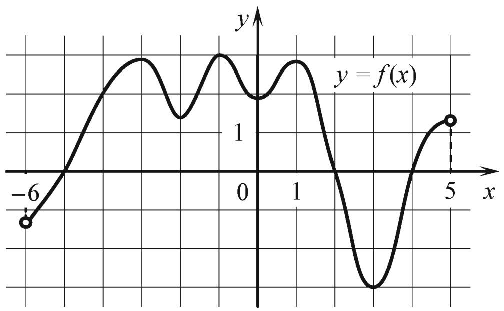
B5 Найдите корень уравнения $4^{4+x} = 4$.

B6 В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 2$, высота CH равна 1. Найдите синус угла ACB.

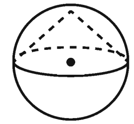


B7 Найдите значение выражения $\log_2 24 - \log_2 0{,}75$.

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

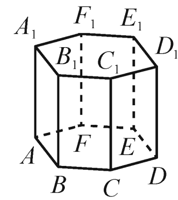


B9 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $32\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.



B10 Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шахматистов, среди которых 5 спортсменов из России, в том числе Кирилл Черноусов. Найдите вероятность того, что в первом туре Кирилл Черноусов будет играть с каким-либо шахматистом из России.

B11 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки F, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.



B12 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 494 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c\cdot\dfrac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 18 м/с. Ответ выразите в МГц.

B13 Катер в 10:00 вышел из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 15 минут, катер отправился назад и вернулся в пункт А в 14:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость катера, если известно, что скорость течения реки равна 1 км/ч.

B14 Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{x^2 + 121}{x}$ на отрезке $[-20; -1]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $12^{\sin x} = 3^{\sin x} \cdot 4^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны $\frac{9}{2}$, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{6-x} \dfrac{x+5}{(x-6)^{12}} \geq -12, \\ x^3 + 7x^2 + \dfrac{30x^2 + 7x - 42}{x-6} \leq 7. \end{cases}$$

C4 Окружности радиусов 1 и 7 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 22{,}5°$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-5 - 6x - x^2} = 5a + 2$$

имеет единственный корень.

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

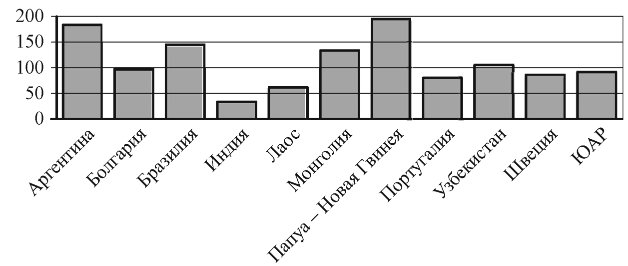
Желаем успеха!

Часть 1

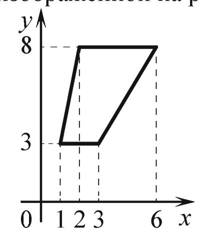
Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Одна таблетка лекарства весит 70 мг и содержит 4% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,05 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте пяти месяцев и весом 8 кг в течение суток?

B2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа – Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимала Монголия?



B3 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



B4 Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P, показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

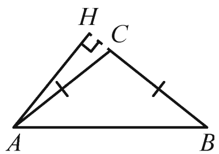
$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей вафельниц. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей вафельниц.

Модель вафельницы	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4100	3	2	4
Б	4700	0	2	2
В	5500	3	1	1
Г	5400	0	2	0

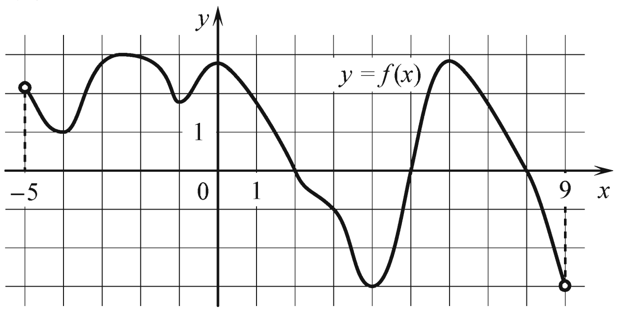
B5 Найдите корень уравнения $2^{9+x} = 8$.

B6 В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 10$, высота AH равна 3. Найдите синус угла BAC.

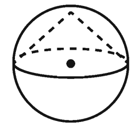


B7 Найдите значение выражения $\log_4 96 - \log_4 1{,}5$.

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

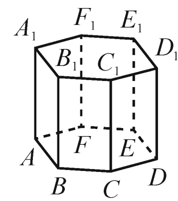


B9 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $32\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.



B10 Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 спортсменов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Георгий Бочкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Георгий Бочкин будет играть с каким-либо спортсменом из России.

B11 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, D_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 5, а боковое ребро равно 9.



B12 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 494 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c \cdot \dfrac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 18 м/с. Ответ выразите в МГц.

B13 Байдарка в 9:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 45 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт А в 16:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки равна 1 км/ч.

B14 Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{x^2 + 441}{x}$ на отрезке $[2; 32]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1 а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

С2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 15, а боковые рёбра равны 16. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и середину ребра MB параллельно прямой AC.

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5-x} \dfrac{x+4}{(x-5)^{10}} \geq -10, \\ x^3 + 8x^2 + \dfrac{50x^2 + x - 7}{x-7} \leq 1. \end{cases}$$

С4 Окружности радиусов 2 и 3 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30°$.

С5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

С6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

Задание	Вар1	Вар2	Вар3
B1	3	2	7
B2	7	6	4
B3	15	12	14
B4	14	6	31
B5	8	-6	10
B6	0,4	0,25	0,3
B7	6	3	3
B8	9	8	7
B9	20	104	46
B10	0,08	0,64	0,2
B11	8	12	9
B12	220,5	602	301
B13	7	8	4
B14	42	18	44

**Памятка для эксперта, проверяющего решения заданий С1–С6
по математике**

Эксперт, проверяющий работу, располагает критериями оценивания решений заданий С1–С6, включающими:

1) формулировку задания с развёрнутым ответом;

2) одно из возможных решений задания;

3) содержание критерия.

Следует помнить, что, проверяя решения заданий с развёрнутым ответом, эксперт оценивает математическую грамотность представленного решения. Эксперт не должен предъявлять особых требований к форме записи и к степени подробности решения, но в то же время должен следить за правильностью и обоснованностью математических утверждений, используемых экзаменуемым.

Максимальный балл за задания:

С1 – 2 балла,
С2 – 2 балла,
С3 – 3 балла.
С4 – 3 балла,
С5 – 4 балла,
С6 – 4 балла.

Если экзаменуемый не приступал к задаче, то в протокол ставится «х».

Если же экзаменуемый приступил к выполнению задания (даже если только переписал условие или написал номер задания), то решение должно быть оценено в соответствии с критериями проверки соответствующего задания.

В распечатанные изображения работ эксперт имеет право вносить любые пометки, помогающие объективной оценке решения задания (эти листы больше не сканируются, а подлежат уничтожению в РЦОИ).

По каждой из шести задач эксперт обязательно заносит в протокол одну из меток: «х», «0», «1», «2», «3», «4» в соответствии с образцом написания меток.

Результаты оценивания заносятся в протокол проверки следующим образом:

– баллы по **С1** переносятся в колонку **1** протокола**;**
– баллы по **С2** переносятся в колонку **2** протокола***;***
– баллы по **С3** переносятся в колонку **3** протокола***;***
– баллы по **С4** переносятся в колонку **4** протокола***;***
– баллы по **С5** переносятся в колонку **5** протокола***;***
– баллы по **С6** переносятся в колонку **6** протокола**.**

Оставшиеся колонки протокола не заполняются.

Внимание! При выставлении баллов за выполнение задания в «Протокол проверки ответов на задания бланка № 2» следует иметь в виду, что **если ответ отсутствует** (нет никаких записей, свидетельствующих о том, что экзаменуемый приступал к выполнению задания), то в протокол проставляется «**Х»**, а не «0».

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $10^{\sin x}=2^{\sin x}\cdot 5^{-\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

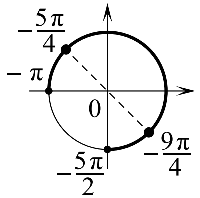
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2^{\sin x}\cdot 5^{\sin x}=2^{\sin x}\cdot 5^{-\cos x};\ 5^{\sin x}=5^{-\cos x};\ \sin x=-\cos x;\ \operatorname{tg} x=-1,$$

откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.



Получим числа: $-\frac{9\pi}{4};\ -\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{9\pi}{4};\ -\frac{5\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

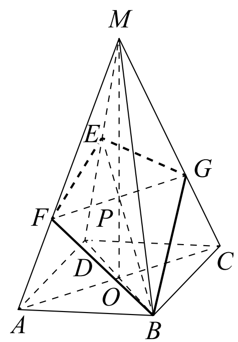
C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF:FA=MG:GC=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=2\sqrt{2}.$$



Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE=\frac{\sqrt{2BD^2+2MB^2-MD^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MB^2}}{2}=5.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно, $S_{BFEG}=\frac{BE\cdot FG}{2}=5\sqrt{2}$.

Ответ: $5\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{5-x}\dfrac{x+4}{(x-5)^{10}}\ge -10,\\ x^3+8x^2+\dfrac{50x^2+x-7}{x-7}\le 1.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{5-x}\frac{x+4}{(x-5)^{10}}\ge -10;\ \log_{5-x}(x+4)-\log_{5-x}(x-5)^{10}\ge -10;\ \log_{5-x}(x+4)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<5-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{5-x}(x+4)\ge 0,\\ 0<5-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+4\le 1,\\ 4<x<5;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $5-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{5-x}(x+4)\ge 0,\\ 5-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+4\ge 1,\\ x<4,\end{cases}\ \text{откуда } -3\le x<4.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-3\le x<4$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+8x^2+\frac{50x^2+x-7}{x-7}\le 1;\ x^3+8x^2+\frac{50x^2}{x-7}\le 0;$$

$$\frac{x^4+x^3-6x^2}{x-7}\le 0;\ \frac{x^2(x-2)(x+3)}{x-7}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -3$; $x = 0$; $2 \le x < 7$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -3$; $x = 0$; $2 \le x < 4$.

Ответ: -3; 0; $[2; 4)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 3 и 5 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 15°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 15°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 15° = 6 \cdot \cos 15°$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 15° = 10 \cdot \cos 15°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 4 \cdot \cos 15°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = \\ = 10 \cdot \cos 15° \cdot \sin 15° = 2{,}5.$$

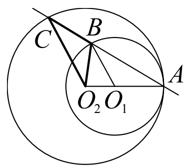


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 16 \cdot \cos 15°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = \\ = 40 \cdot \cos 15° \cdot \sin 15° = 10.$$

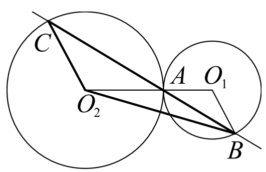


Рис. 2

Ответ: 2,5 или 10.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

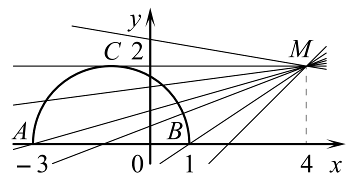
$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{3 - 2x - x^2} = -ax + 4a + 2$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ и $g(x) = -ax + 4a + 2$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{2^2 - (x+1)^2}$ является полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-1; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(4; 2)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.



Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y = -ax + 4a + 2$, проходит через точки $M(4; 2)$ и $A(-3; 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{2}{7}$.

При $0 < -a \le \frac{2}{7}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 4a + 2$, имеет две общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y = -ax + 4a + 2$, проходит через точки $M(4; 2)$ и $B(1; 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{2}{3}$. При $\frac{2}{7}<-a\le\frac{2}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{2}{3}\le a<-\frac{2}{7}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{2}{3}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{2}{3};-\frac{2}{7}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{2}{3}$, $a=-\frac{2}{7}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{2}{3}$ и/или включением точки $a=-\frac{2}{7}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{2}{3}$, $a=-\frac{2}{7}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{2}{3}$, $a=-\frac{2}{7}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41-7-9-11=14$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 7 и 7 или 14. Для задуманных чисел 7, 7, 7, 9, 11 и 7, 9, 11, 14 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 7, 7, 7, 9, 11 или 7, 9, 11, 14.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $15^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x}$.

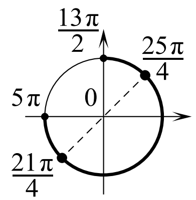
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi;\frac{13\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{\cos x}\cdot 5^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x};\ 5^{\cos x}=5^{\sin x};\ \cos x=\sin x;\ \operatorname{tg} x=1,$$

откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.



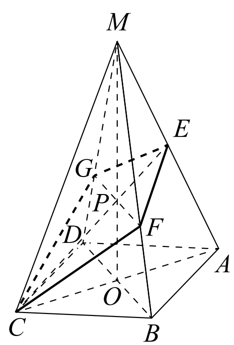
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi;\frac{13\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.



Решение.

Пусть точка E — середина ребра MA. Отрезок CE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MB, G — ребру MD), откуда

$$MF:FB=MG:GD=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}BD=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=4\sqrt{2}.$$

Четырёхугольник $CFEG$ — искомое сечение. Отрезок CE — медиана треугольника MAC, значит,

$$CE=\frac{\sqrt{2AC^2+2MC^2-MA^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MC^2}}{2}=6\sqrt{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали CE и FG четырёхугольника $CFEG$ перпендикулярны, следовательно, $S_{CFEG}=\frac{CE\cdot FG}{2}=24$.

Ответ: 24.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{3-x}\dfrac{x+4}{(x-3)^2}\ge -2,\\ x^3+6x^2+\dfrac{21x^2+3x-12}{x-4}\le 3.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{3-x}\frac{x+4}{(x-3)^2}\ge -2;\ \log_{3-x}(x+4)-\log_{3-x}(x-3)^2\ge -2;\ \log_{3-x}(x+4)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<3-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{3-x}(x+4)\ge 0,\\ 0<3-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+4\le 1,\\ 2<x<3;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $3-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{3-x}(x+4)\ge 0,\\ 3-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+4\ge 1,\\ x<2,\end{cases}\ \text{откуда } -3\le x<2.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-3\le x<2$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+6x^2+\frac{21x^2+3x-12}{x-4}\le 3;\ x^3+6x^2+\frac{21x^2}{x-4}\le 0;$$

$$\frac{x^4+2x^3-3x^2}{x-4}\le 0;\ \frac{x^2(x-1)(x+3)}{x-4}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\le -3$; $x=0$; $1\le x<4$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-3$; $x=0$; $1\le x<2$.

Ответ: -3; 0; $[1;2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 2 и 3 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1=30°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1=\angle BAO_1=\angle CAO_2=\angle ACO_2=30°$, откуда $AB=2O_1A\cdot\cos 30°=2\sqrt{3}$, $AC=2O_2A\cdot\cos 30°=3\sqrt{3}$.

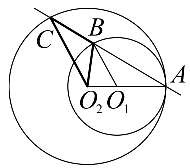


Рис. 1

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC=AC-AB=\sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC=AC+AB=5\sqrt{3}$.

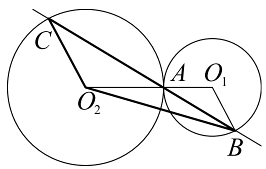


Рис. 2

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ или $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

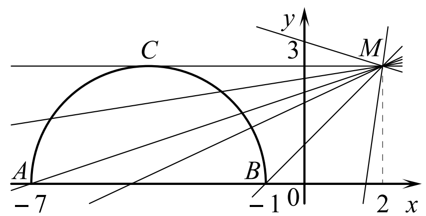
$$ax+\sqrt{-7-8x-x^2}=2a+3$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-7-8x-x^2}=-ax+2a+3$. Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{-7-8x-x^2}$ и $g(x)=-ax+2a+3$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{3^2-(x+4)^2}$ является полуокружность радиуса 3 с центром в точке $(-4;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(2;3)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.



Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, проходит через точки $M(2;3)$ и $A(-7;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{3}$. При $0<-a\le\frac{1}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, имеет две общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, проходит через точки $M(2;3)$ и $B(-1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=1$. При $\frac{1}{3}<-a\le 1$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-1\le a<-\frac{1}{3}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>1$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-1;-\frac{1}{3}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-1$, $a=-\frac{1}{3}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-1$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{3}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-1$, $a=-\frac{1}{3}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-1$, $a=-\frac{1}{3}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

Решение.

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 9 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{52}{9}$, то есть 5. Кроме того, числа 10 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 9, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $52-9-10-11=22$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 9, оставшиеся задуманные числа — это 11 и 11 или 22. Для задуманных чисел 9, 10, 11, 11, 11 и 9, 10, 11, 22 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 9, 10, 11, 11, 11 или 9, 10, 11, 22.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $21^{-\sin x} = 3^{-\sin x} \cdot 7^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

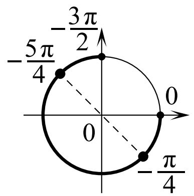
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{-\sin x} \cdot 7^{-\sin x} = 3^{-\sin x} \cdot 7^{\cos x};\ 7^{-\sin x} = 7^{\cos x};\ -\sin x = \cos x;\ \operatorname{tg} x = -1,$$

откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.



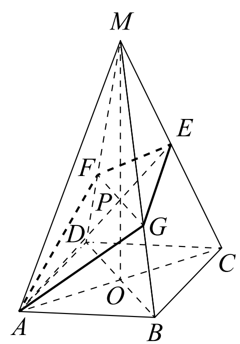
Получим числа: $-\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 5. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку A и середину ребра MC параллельно прямой BD.

Решение.



Пусть точка E — середина ребра MC. Отрезок AE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP : PO = 2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MD, G — ребру MB), откуда

$$MF : FD = MG : GB = MP : PO = 2:1;$$

$$FG = \frac{2}{3} BD = \frac{2\sqrt{2} \cdot AB}{3} = 4\sqrt{2}.$$

Четырёхугольник $AFEG$ — искомое сечение. Отрезок AE — медиана треугольника MAC, значит,

$$AE = \frac{\sqrt{2AC^2 + 2MA^2 - MC^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MA^2}}{2} = \frac{13}{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали AE и FG четырёхугольника $AFEG$ перпендикулярны, следовательно, $S_{AFEG} = \frac{AE \cdot FG}{2} = 13\sqrt{2}$.

Ответ: $13\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x} \dfrac{x+6}{(x-4)^6} \ge -6, \\ x^3 + 9x^2 + \dfrac{40x^2 + 2x - 10}{x-5} \le 2. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{4-x} \frac{x+6}{(x-4)^6} \ge -6;\ \log_{4-x}(x+6) - \log_{4-x}(x-4)^6 \ge -6;\ \log_{4-x}(x+6) \ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 4 - x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+6) \ge 0, \\ 0 < 4 - x < 1; \end{cases} \begin{cases} 0 < x + 6 \le 1, \\ 3 < x < 4; \end{cases} \text{нет решений.}$$

Второй случай: $4 - x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+6) \ge 0, \\ 4 - x > 1; \end{cases} \begin{cases} x + 6 \ge 1, \\ x < 3, \end{cases} \text{откуда } -5 \le x < 3.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-5 \le x < 3$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 9x^2 + \frac{40x^2 + 2x - 10}{x-5} \le 2;\ x^3 + 9x^2 + \frac{40x^2}{x-5} \le 0;$$

$$\frac{x^4 + 4x^3 - 5x^2}{x-5} \le 0;\ \frac{x^2(x-1)(x+5)}{x-5} \le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -5$; $x = 0$; $1 \le x < 5$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-5$; $x=0$; $1\le x<3$.

Ответ: -5; 0; $[1;3)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 2 и 10 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1=22{,}5°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1=\angle BAO_1=\angle CAO_2=\angle ACO_2=22{,}5°$, откуда $AB=2O_1A\cdot\cos 22{,}5°=4\cdot\cos 22{,}5°$, $AC=2O_2A\cdot\cos 22{,}5°=20\cdot\cos 22{,}5°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC=AC-AB=16\cdot\cos 22{,}5°$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=80\cdot\cos 22{,}5°\cdot\sin 22{,}5°=20\sqrt{2}.$$

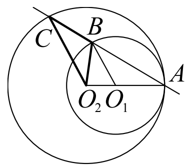


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC=AC+AB=24\cdot\cos 22{,}5°$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=120\cdot\cos 22{,}5°\cdot\sin 22{,}5°=30\sqrt{2}.$$

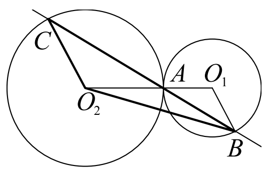


Рис. 2

Ответ: $20\sqrt{2}$ или $30\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

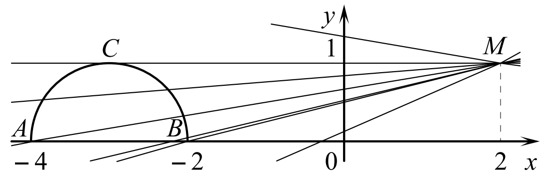
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax+\sqrt{-8-6x-x^2}=2a+1$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-8-6x-x^2}=-ax+2a+1$. Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{-8-6x-x^2}$ и $g(x)=-ax+2a+1$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{1^2-(x+3)^2}$ является полуокружность радиуса 1 с центром в точке $(-3;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(2;1)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, проходит через точки $M(2;1)$ и $A(-4;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{6}$. При $0<-a\le\frac{1}{6}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, имеет две общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, проходит через точки $M(2;1)$ и $B(-2;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{4}$. При $\frac{1}{6}<-a\le\frac{1}{4}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{1}{4}\le a<-\frac{1}{6}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{1}{4}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{1}{4}$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{6}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 10, 12, 13, 22, 23, 24, 25, 34, 35, 36, 37, 46, 47, 49, 59.

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 10 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{59}{10}$, то есть 5. Кроме того, числа 12 и 13 меньше, чем сумма двух чисел 10, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $59-10-12-13=24$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 10, оставшиеся задуманные числа — это 12 и 12 или 24. Для задуманных чисел 10, 12, 12, 12, 13 и 10, 12, 13, 24 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 10, 12, 12, 12, 13 или 10, 12, 13, 24.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $20^{\cos x}=4^{\cos x}\cdot 5^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};-3\pi\right]$.

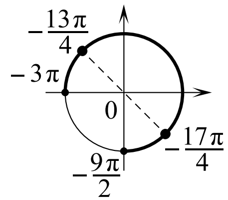
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$4^{\cos x}\cdot 5^{\cos x}=4^{\cos x}\cdot 5^{-\sin x};\ 5^{\cos x}=5^{-\sin x};\ \cos x=-\sin x;\ \operatorname{tg} x=-1,$$

откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};-3\pi\right]$.



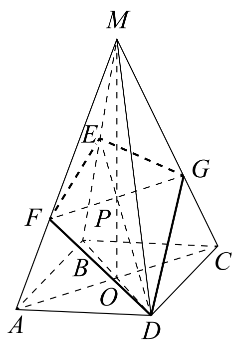
Получим числа: $-\frac{17\pi}{4};\ -\frac{13\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{4};\ -\frac{13\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 15, а боковые рёбра равны 16. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и середину ребра MB параллельно прямой AC.

Решение.



Пусть точка E — середина ребра MB. Отрезок DE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF:FA=MG:GC=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=10\sqrt{2}.$$

Четырёхугольник $DFEG$ — искомое сечение. Отрезок DE — медиана треугольника MBD, значит,

$$DE=\frac{\sqrt{2BD^2+2MD^2-MB^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MD^2}}{2}=17.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали DE и FG четырёхугольника $DFEG$ перпендикулярны, следовательно, $S_{DFEG}=\frac{DE\cdot FG}{2}=85\sqrt{2}$.

Ответ: $85\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{3-x}\dfrac{x+7}{(x-3)^4}\ge -4,\\ x^3+8x^2+\dfrac{18x^2+5x-15}{x-3}\le 5.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{3-x}\frac{x+7}{(x-3)^4}\ge -4;\ \log_{3-x}(x+7)-\log_{3-x}(x-3)^4\ge -4;\ \log_{3-x}(x+7)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<3-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{3-x}(x+7)\ge 0,\\ 0<3-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+7\le 1,\\ 2<x<3;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $3-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{3-x}(x+7)\ge 0,\\ 3-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+7\ge 1,\\ x<2,\end{cases}\ \text{откуда } -6\le x<2.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-6\le x<2$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+8x^2+\frac{18x^2+5x-15}{x-3}\le 5;\ x^3+8x^2+\frac{18x^2}{x-3}\le 0;$$

$$\frac{x^4+5x^3-6x^2}{x-3}\le 0;\ \frac{x^2(x-1)(x+6)}{x-3}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\le -6$; $x=0$; $1\le x<3$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-6$; $x=0$; $1\le x<2$.

Ответ: -6; 0; $[1;2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 3 и 9 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1=30°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1=\angle BAO_1=\angle CAO_2=\angle ACO_2=30°$, откуда $AB=2O_1A\cdot\cos 30°=3\sqrt{3}$, $AC=2O_2A\cdot\cos 30°=9\sqrt{3}$.

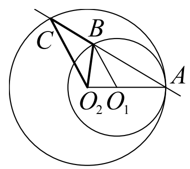


Рис. 1

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC=AC-AB=6\sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=\frac{27\sqrt{3}}{2}.$$

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC=AC+AB=12\sqrt{3}$.

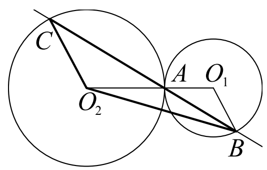


Рис. 2

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=27\sqrt{3}.$$

Ответ: $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ или $27\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

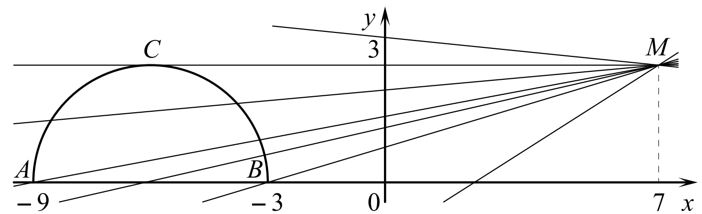
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax+\sqrt{-27-12x-x^2}=7a+3$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-27-12x-x^2}=-ax+7a+3$. Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{-27-12x-x^2}$ и $g(x)=-ax+7a+3$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{3^2-(x+6)^2}$ является полуокружность радиуса 3 с центром в точке $(-6;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(7;3)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+7a+3$, проходит через точки $M(7;3)$ и $A(-9;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{3}{16}$. При $0<-a\le\frac{3}{16}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+7a+3$, имеет две общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+7a+3$, проходит через точки $M(7;3)$ и $B(-3;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{3}{10}$. При $\frac{3}{16}<-a\le\frac{3}{10}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+7a+3$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{3}{10}\le a<-\frac{3}{16}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{3}{10}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{3}{10};-\frac{3}{16}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{3}{10}$, $a=-\frac{3}{16}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{3}{10}$ и/или включением точки $a=-\frac{3}{16}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{3}{10}$, $a=-\frac{3}{16}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{3}{10}$, $a=-\frac{3}{16}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 8 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{47}{8}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 10 меньше, чем сумма двух чисел 8, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $47-8-9-10=20$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 8, оставшиеся задуманные числа — это 10 и 10 или 20. Для задуманных чисел 8, 9, 10, 10, 10 и 8, 9, 10, 20 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 8, 9, 10, 10, 10 или 8, 9, 10, 20.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $12^{\sin x}=3^{\sin x}\cdot 4^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

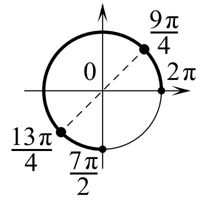
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{\sin x}\cdot 4^{\sin x}=3^{\sin x}\cdot 4^{\cos x};\ 4^{\sin x}=4^{\cos x};\ \sin x=\cos x;\ \operatorname{tg} x=1,$$

откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

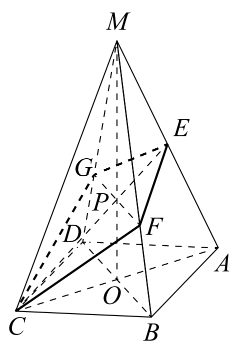


Получим числа: $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны $\frac{9}{2}$, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.



Решение.

Пусть точка E — середина ребра MA. Отрезок CE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MB, G — ребру MD), откуда

$$MF:FB=MG:GD=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}BD=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=3\sqrt{2}.$$

Четырёхугольник $CFEG$ — искомое сечение. Отрезок CE — медиана треугольника MAC, значит,

$$CE=\frac{\sqrt{2AC^2+2MC^2-MA^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MC^2}}{2}=\frac{15}{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали CE и FG четырёхугольника $CFEG$ перпендикулярны, следовательно, $S_{CFEG}=\frac{CE\cdot FG}{2}=\frac{45\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\frac{45\sqrt{2}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{6-x}\dfrac{x+5}{(x-6)^{12}}\ge -12,\\ x^3+7x^2+\dfrac{30x^2+7x-42}{x-6}\le 7.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{6-x}\frac{x+5}{(x-6)^{12}}\ge -12;\ \log_{6-x}(x+5)-\log_{6-x}(x-6)^{12}\ge -12;\ \log_{6-x}(x+5)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<6-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{6-x}(x+5)\ge 0,\\ 0<6-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+5\le 1,\\ 5<x<6;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $6-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{6-x}(x+5)\ge 0,\\ 6-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+5\ge 1,\\ x<5,\end{cases}\ \text{откуда } -4\le x<5.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-4\le x<5$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+7x^2+\frac{30x^2+7x-42}{x-6}\le 7;\ x^3+7x^2+\frac{30x^2}{x-6}\le 0;$$

$$\frac{x^4+x^3-12x^2}{x-6}\le 0;\ \frac{x^2(x-3)(x+4)}{x-6}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -4$; $x = 0$; $3 \le x < 6$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -4$; $x = 0$; $3 \le x < 5$.

Ответ: -4; 0; $[3; 5)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 1 и 7 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 22{,}5°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 22{,}5°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 22{,}5° = 2 \cdot \cos 22{,}5°$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 22{,}5° = 14 \cdot \cos 22{,}5°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 12 \cdot \cos 22{,}5°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} =$$
$$= 42 \cdot \cos 22{,}5° \cdot \sin 22{,}5° = \frac{21\sqrt{2}}{2}.$$

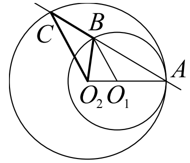


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 16 \cdot \cos 22{,}5°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} =$$
$$= 56 \cdot \cos 22{,}5° \cdot \sin 22{,}5° = 14\sqrt{2}.$$

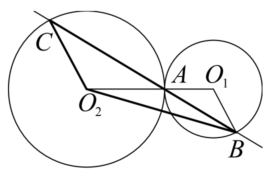


Рис. 2

Ответ: $\frac{21\sqrt{2}}{2}$ или $14\sqrt{2}$.

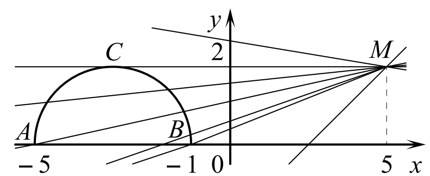
Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$ax + \sqrt{-5 - 6x - x^2} = 5a + 2$$
имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-5 - 6x - x^2} = -ax + 5a + 2$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{-5 - 6x - x^2}$ и $g(x) = -ax + 5a + 2$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{2^2 - (x+3)^2}$ является полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-3; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(5; 2)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.



Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y = -ax + 5a + 2$, проходит через точки $M(5; 2)$ и $A(-5; 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{1}{5}$.

При $0 < -a \le \frac{1}{5}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 5a + 2$, имеет две общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением

$y=-ax+5a+2$, проходит через точки $M(5;2)$ и $B(-1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{3}$. При $\frac{1}{5}<-a\le\frac{1}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+5a+2$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{1}{3}\le a<-\frac{1}{5}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{1}{3}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3};-\frac{1}{5}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{3}$, $a=-\frac{1}{5}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{1}{3}$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{5}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{3}$, $a=-\frac{1}{5}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{1}{3}$, $a=-\frac{1}{5}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

Решение.

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 8 и 10 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41-7-8-10=16$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 8 и 8 или 16. Для задуманных чисел 7, 8, 8, 8, 10 и 7, 8, 10, 16 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 7, 8, 8, 8, 10 или 7, 8, 10, 16.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $14^{\cos x}=2^{\cos x}\cdot 7^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

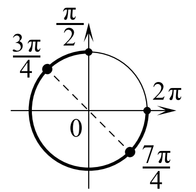
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2^{\cos x}\cdot 7^{\cos x}=2^{\cos x}\cdot 7^{-\sin x};\ 7^{\cos x}=7^{-\sin x};\ \cos x=-\sin x;\ \operatorname{tg} x=-1,$$

откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.



Получим числа: $\frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}$.

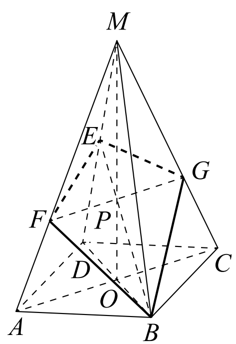
Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 4, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда



$$MF:FA=MG:GC=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE=\frac{\sqrt{2BD^2+2MB^2-MD^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MB^2}}{2}=4\sqrt{2}.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно, $S_{BFEG}=\frac{BE\cdot FG}{2}=\frac{32}{3}$.

Ответ: $\frac{32}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{7-x}\dfrac{x+3}{(x-7)^8}\ge -8,\\ x^3+6x^2+\dfrac{40x^2+3x-24}{x-8}\le 3.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{7-x}\frac{x+3}{(x-7)^8}\ge -8;\ \log_{7-x}(x+3)-\log_{7-x}(x-7)^8\ge -8;\ \log_{7-x}(x+3)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<7-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{7-x}(x+3)\ge 0,\\ 0<7-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+3\le 1,\\ 6<x<7;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $7-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{7-x}(x+3)\ge 0,\\ 7-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+3\ge 1,\\ x<6,\end{cases}\ \text{откуда } -2\le x<6.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-2\le x<6$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+6x^2+\frac{40x^2+3x-24}{x-8}\le 3;\ x^3+6x^2+\frac{40x^2}{x-8}\le 0;$$

$$\frac{x^4-2x^3-8x^2}{x-8}\le 0;\ \frac{x^2(x-4)(x+2)}{x-8}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -2$; $x = 0$; $4 \le x < 8$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -2$; $x = 0$; $4 \le x < 6$.

Ответ: -2; 0; $[4; 6)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 5 и 8 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 15°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 15°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 15° = 10 \cdot \cos 15°$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 15° = 16 \cdot \cos 15°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 6 \cdot \cos 15°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = 24 \cdot \cos 15° \cdot \sin 15° = 6.$$

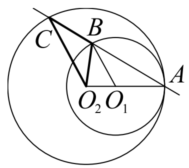


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 26 \cdot \cos 15°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = 104 \cdot \cos 15° \cdot \sin 15° = 26.$$

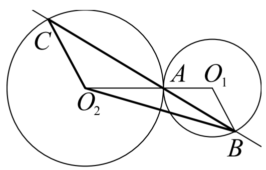


Рис. 2

Ответ: 6 или 26.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

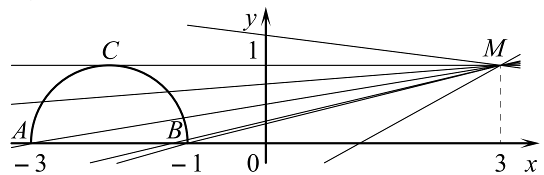
$$ax + \sqrt{-3 - 4x - x^2} = 3a + 1$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-3-4x-x^2} = -ax + 3a + 1$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{-3-4x-x^2}$ и $g(x) = -ax + 3a + 1$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{1^2 - (x+2)^2}$ является полуокружность радиуса 1 с центром в точке $(-2; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(3; 1)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.



Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y = -ax + 3a + 1$, проходит через точки $M(3; 1)$ и $A(-3; 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{1}{6}$. При $0 < -a \le \frac{1}{6}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 3a + 1$, имеет две общие

точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+3a+1$, проходит через точки $M(3;1)$ и $B(-1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{4}$. При $\frac{1}{6}<-a\le\frac{1}{4}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+3a+1$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{1}{4}\le a<-\frac{1}{6}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{1}{4}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{1}{4}$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{6}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 29.

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 5 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{29}{5}$, то есть 5. Кроме того, числа 6 и 8 меньше, чем сумма двух чисел 5, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $29-5-6-8=10$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 5, оставшиеся задуманные числа — это 5 и 5 или 10. Для задуманных чисел 5, 5, 5, 6, 8 и 5, 6, 8, 10 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 5, 5, 5, 6, 8 или 5, 6, 8, 10.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $12^{\sin x}=3^{\sin x}\cdot 4^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

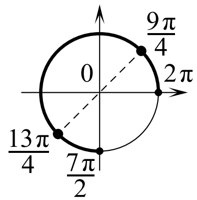
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{\sin x}\cdot 4^{\sin x}=3^{\sin x}\cdot 4^{\cos x};\ 4^{\sin x}=4^{\cos x};\ \sin x=\cos x;\ \operatorname{tg} x=1,$$

откуда $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $\dfrac{9\pi}{4};\ \dfrac{13\pi}{4}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{9\pi}{4};\ \dfrac{13\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

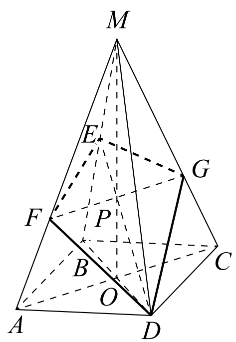
C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 15, а боковые рёбра равны 16. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и середину ребра MB параллельно прямой AC.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MB. Отрезок DE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF:FA=MG:GC=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=10\sqrt{2}.$$



Четырёхугольник $DFEG$ — искомое сечение. Отрезок DE — медиана треугольника MBD, значит,

$$DE=\frac{\sqrt{2BD^2+2MD^2-MB^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MD^2}}{2}=17.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали DE и FG четырёхугольника $DFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{DFEG}=\frac{DE\cdot FG}{2}=85\sqrt{2}.$$

Ответ: $85\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{4-x}\dfrac{x+6}{(x-4)^6}\ge -6,\\ x^3+9x^2+\dfrac{40x^2+2x-10}{x-5}\le 2.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{4-x}\frac{x+6}{(x-4)^6}\ge -6;\ \log_{4-x}(x+6)-\log_{4-x}(x-4)^6\ge -6;\ \log_{4-x}(x+6)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<4-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+6)\ge 0,\\ 0<4-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+6\le 1,\\ 3<x<4;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $4-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+6)\ge 0,\\ 4-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+6\ge 1,\\ x<3,\end{cases}\ \text{откуда } -5\le x<3.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-5\le x<3$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+9x^2+\frac{40x^2+2x-10}{x-5}\le 2;\ x^3+9x^2+\frac{40x^2}{x-5}\le 0;$$

$$\frac{x^4+4x^3-5x^2}{x-5}\le 0;\ \frac{x^2(x-1)(x+5)}{x-5}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\le -5$; $x=0$; $1\le x<5$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-5$; $x=0$; $1\le x<3$.

Ответ: -5; 0; $[1;3)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 3 и 9 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1=30°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1=\angle BAO_1=\angle CAO_2=\angle ACO_2=30°$, откуда $AB=2O_1A\cdot\cos 30°=3\sqrt{3}$, $AC=2O_2A\cdot\cos 30°=9\sqrt{3}$.

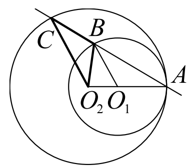


Рис. 1

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC=AC-AB=6\sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=\frac{27\sqrt{3}}{2}.$$

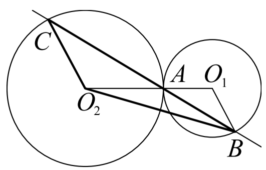


Рис. 2

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC=AC+AB=12\sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=27\sqrt{3}.$$

Ответ: $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ или $27\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

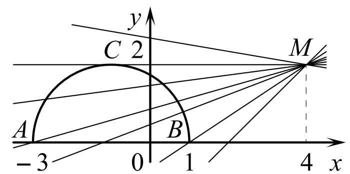
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{3-2x-x^2}=-ax+4a+2$. Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$ и $g(x)=-ax+4a+2$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{2^2-(x+1)^2}$ является полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-1;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(4;2)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, проходит через точки $M(4;2)$ и $A(-3;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{2}{7}$.

При $0<-a\le\frac{2}{7}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, имеет две

общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, проходит через точки $M(4;2)$ и $B(1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{2}{3}$. При $\frac{2}{7}<-a\le\frac{2}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{2}{3}\le a<-\frac{2}{7}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{2}{3}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{2}{3};-\frac{2}{7}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{2}{3}$, $a=-\frac{2}{7}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{2}{3}$ и/или включением точки $a=-\frac{2}{7}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{2}{3}$, $a=-\frac{2}{7}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{2}{3}$, $a=-\frac{2}{7}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 8 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{47}{8}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 10 меньше, чем сумма двух чисел 8, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $47-8-9-10=20$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 8, оставшиеся задуманные числа — это 10 и 10 или 20. Для задуманных чисел 8, 9, 10, 10, 10 и 8, 9, 10, 20 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 8, 9, 10, 10, 10 или 8, 9, 10, 20.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $15^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi;\frac{13\pi}{2}\right]$.

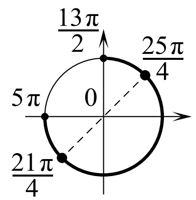
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{\cos x}\cdot 5^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x};\ 5^{\cos x}=5^{\sin x};\ \cos x=\sin x;\ \operatorname{tg} x=1,$$

откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi;\frac{13\pi}{2}\right]$.



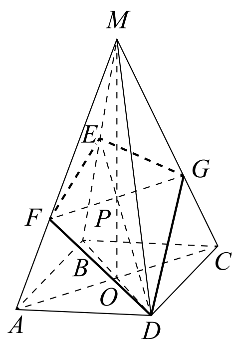
Получим числа: $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 15, а боковые рёбра равны 16. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и середину ребра MB параллельно прямой AC.

Решение.



Пусть точка E — середина ребра MB. Отрезок DE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF:FA=MG:GC=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=10\sqrt{2}.$$

Четырёхугольник $DFEG$ — искомое сечение. Отрезок DE — медиана треугольника MBD, значит,

$$DE=\frac{\sqrt{2BD^2+2MD^2-MB^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MD^2}}{2}=17.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали DE и FG четырёхугольника $DFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{DFEG}=\frac{DE\cdot FG}{2}=85\sqrt{2}.$$

Ответ: $85\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{5-x}\dfrac{x+4}{(x-5)^{10}}\ge -10,\\ x^3+8x^2+\dfrac{50x^2+x-7}{x-7}\le 1.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{5-x}\frac{x+4}{(x-5)^{10}}\ge -10;\ \log_{5-x}(x+4)-\log_{5-x}(x-5)^{10}\ge -10;\ \log_{5-x}(x+4)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<5-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{5-x}(x+4)\ge 0,\\ 0<5-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+4\le 1,\\ 4<x<5;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $5-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{5-x}(x+4)\ge 0,\\ 5-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+4\ge 1,\\ x<4,\end{cases}\ \text{откуда } -3\le x<4.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-3\le x<4$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+8x^2+\frac{50x^2+x-7}{x-7}\le 1;\ x^3+8x^2+\frac{50x^2}{x-7}\le 0;$$

$$\frac{x^4+x^3-6x^2}{x-7}\le 0;\ \frac{x^2(x-2)(x+3)}{x-7}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -3$; $x = 0$; $2 \le x < 7$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -3$; $x = 0$; $2 \le x < 4$.

Ответ: -3; 0; $[2; 4)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 2 и 3 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 30°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 30° = 2\sqrt{3}$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 30° = 3\sqrt{3}$.

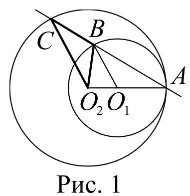


Рис. 1

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = \sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

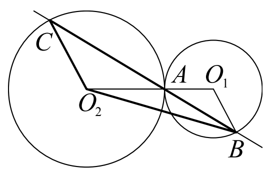


Рис. 2

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 5\sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ или $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

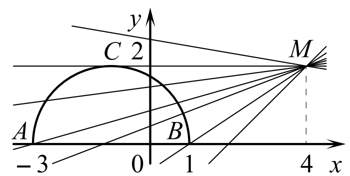
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{3 - 2x - x^2} = -ax + 4a + 2$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ и $g(x) = -ax + 4a + 2$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{2^2 - (x+1)^2}$ является полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-1; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(4; 2)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y = -ax + 4a + 2$, проходит через точки $M(4; 2)$ и $A(-3; 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{2}{7}$.

При $0 < -a \le \frac{2}{7}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 4a + 2$, имеет две

общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, проходит через точки $M(4;2)$ и $B(1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{2}{3}$. При $\frac{2}{7}<-a\le\frac{2}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{2}{3}\le a<-\frac{2}{7}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{2}{3}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{2}{3};-\frac{2}{7}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{2}{3}$, $a=-\frac{2}{7}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{2}{3}$ и/или включением точки $a=-\frac{2}{7}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{2}{3}$, $a=-\frac{2}{7}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{2}{3}$, $a=-\frac{2}{7}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

Решение.

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 8 и 10 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41-7-8-10=16$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 8 и 8 или 16. Для задуманных чисел 7, 8, 8, 8, 10 и 7, 8, 10, 16 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 7, 8, 8, 8, 10 или 7, 8, 10, 16.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $14^{\cos x} = 2^{\cos x} \cdot 7^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

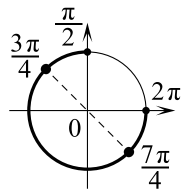
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2^{\cos x} \cdot 7^{\cos x} = 2^{\cos x} \cdot 7^{-\sin x};\ 7^{\cos x} = 7^{-\sin x};\ \cos x = -\sin x;\ \operatorname{tg} x = -1,$$

откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.



Получим числа: $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

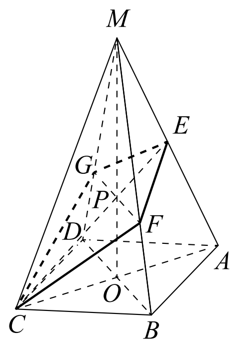
C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны $\frac{9}{2}$, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MA. Отрезок CE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO = 2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MB, G — ребру MD), откуда

$$MF:FB = MG:GD = MP:PO = 2:1;$$

$$FG = \frac{2}{3}BD = \frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3} = 3\sqrt{2}.$$



Четырёхугольник $CFEG$ — искомое сечение. Отрезок CE — медиана треугольника MAC, значит,

$$CE = \frac{\sqrt{2AC^2 + 2MC^2 - MA^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MC^2}}{2} = \frac{15}{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали CE и FG четырёхугольника $CFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{CFEG} = \frac{CE\cdot FG}{2} = \frac{45\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{45\sqrt{2}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{6-x} \dfrac{x+5}{(x-6)^{12}} \ge -12, \\ x^3 + 7x^2 + \dfrac{30x^2 + 7x - 42}{x-6} \le 7. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{6-x} \frac{x+5}{(x-6)^{12}} \ge -12;\ \log_{6-x}(x+5) - \log_{6-x}(x-6)^{12} \ge -12;\ \log_{6-x}(x+5) \ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 6 - x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{6-x}(x+5) \ge 0, \\ 0 < 6 - x < 1; \end{cases} \begin{cases} 0 < x+5 \le 1, \\ 5 < x < 6; \end{cases} \text{ нет решений.}$$

Второй случай: $6 - x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{6-x}(x+5) \ge 0, \\ 6 - x > 1; \end{cases} \begin{cases} x+5 \ge 1, \\ x < 5, \end{cases} \text{ откуда } -4 \le x < 5.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-4 \le x < 5$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 7x^2 + \frac{30x^2 + 7x - 42}{x-6} \le 7;\ x^3 + 7x^2 + \frac{30x^2}{x-6} \le 0;$$

$$\frac{x^4 + x^3 - 12x^2}{x-6} \le 0;\ \frac{x^2(x-3)(x+4)}{x-6} \le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -4$; $x = 0$; $3 \le x < 6$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -4$; $x = 0$; $3 \le x < 5$.

Ответ: -4; 0; $[3; 5)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 3 и 9 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 30°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 30° = 3\sqrt{3}$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 30° = 9\sqrt{3}$.

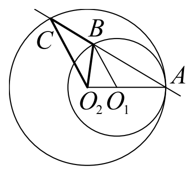


Рис. 1

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 6\sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}.$$

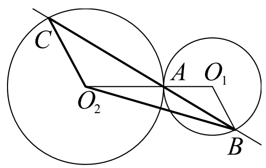


Рис. 2

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 12\sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = 27\sqrt{3}.$$

Ответ: $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ или $27\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

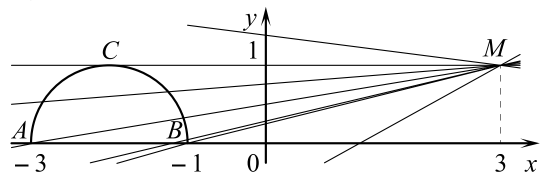
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-3 - 4x - x^2} = 3a + 1$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-3 - 4x - x^2} = -ax + 3a + 1$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{-3 - 4x - x^2}$ и $g(x) = -ax + 3a + 1$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{1^2 - (x+2)^2}$ является полуокружность радиуса 1 с центром в точке $(-2; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(3; 1)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y = -ax + 3a + 1$, проходит через точки $M(3; 1)$ и $A(-3; 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{1}{6}$. При $0 < -a \le \frac{1}{6}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 3a + 1$, имеет две общие

точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+3a+1$, проходит через точки $M(3;1)$ и $B(-1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{4}$. При $\frac{1}{6}<-a\le\frac{1}{4}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+3a+1$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{1}{4}\le a<-\frac{1}{6}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{1}{4}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{1}{4}$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{6}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

Решение.

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 9 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{52}{9}$, то есть 5. Кроме того, числа 10 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 9, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $52-9-10-11=22$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 9, оставшиеся задуманные числа — это 11 и 11 или 22. Для задуманных чисел 9, 10, 11, 11, 11 и 9, 10, 11, 22 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 9, 10, 11, 11, 11 или 9, 10, 11, 22.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $12^{\sin x}=3^{\sin x}\cdot 4^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

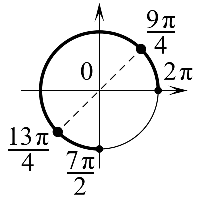
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{\sin x}\cdot 4^{\sin x}=3^{\sin x}\cdot 4^{\cos x};\ 4^{\sin x}=4^{\cos x};\ \sin x=\cos x;\ \operatorname{tg} x=1,$$

откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$.

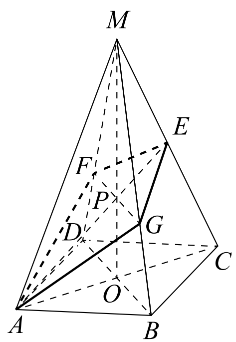
Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 5. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку A и середину ребра MC параллельно прямой BD.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MC. Отрезок AE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MD, G — ребру MB), откуда



$$MF:FD=MG:GB=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}BD=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=4\sqrt{2}.$$

Четырёхугольник $AFEG$ — искомое сечение. Отрезок AE — медиана треугольника MAC, значит,

$$AE=\frac{\sqrt{2AC^2+2MA^2-MC^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MA^2}}{2}=\frac{13}{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали AE и FG четырёхугольника $AFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{AFEG}=\frac{AE\cdot FG}{2}=13\sqrt{2}.$$

Ответ: $13\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{5-x}\dfrac{x+4}{(x-5)^{10}}\ge -10,\\ x^3+8x^2+\dfrac{50x^2+x-7}{x-7}\le 1.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{5-x}\frac{x+4}{(x-5)^{10}}\ge -10;\ \log_{5-x}(x+4)-\log_{5-x}(x-5)^{10}\ge -10;\ \log_{5-x}(x+4)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<5-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{5-x}(x+4)\ge 0,\\ 0<5-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+4\le 1,\\ 4<x<5;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $5-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{5-x}(x+4)\ge 0,\\ 5-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+4\ge 1,\\ x<4,\end{cases}\ \text{откуда } -3\le x<4.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-3\le x<4$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+8x^2+\frac{50x^2+x-7}{x-7}\le 1;\ x^3+8x^2+\frac{50x^2}{x-7}\le 0;$$

$$\frac{x^4+x^3-6x^2}{x-7}\le 0;\ \frac{x^2(x-2)(x+3)}{x-7}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -3$; $x = 0$; $2 \le x < 7$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -3$; $x = 0$; $2 \le x < 4$.

Ответ: -3; 0; $[2; 4)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 2 и 10 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 22{,}5°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 22{,}5°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 22{,}5° = 4 \cdot \cos 22{,}5°$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 22{,}5° = 20 \cdot \cos 22{,}5°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 16 \cdot \cos 22{,}5°$.

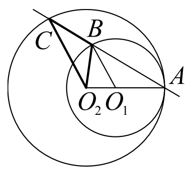


Рис. 1

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = 80 \cdot \cos 22{,}5° \cdot \sin 22{,}5° = 20\sqrt{2}.$$

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 24 \cdot \cos 22{,}5°$.

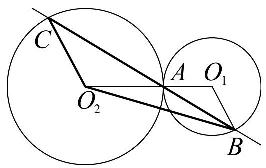


Рис. 2

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = 120 \cdot \cos 22{,}5° \cdot \sin 22{,}5° = 30\sqrt{2}.$$

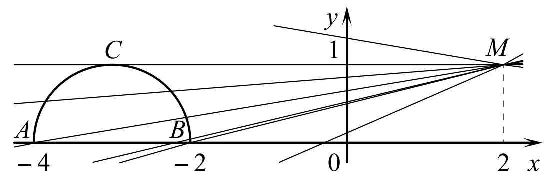
Ответ: $20\sqrt{2}$ или $30\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$ax + \sqrt{-8 - 6x - x^2} = 2a + 1$$
имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-8 - 6x - x^2} = -ax + 2a + 1$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{-8 - 6x - x^2}$ и $g(x) = -ax + 2a + 1$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{1^2 - (x+3)^2}$ является полуокружность радиуса 1 с центром в точке $(-3; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(2; 1)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y = -ax + 2a + 1$, проходит через точки $M(2; 1)$ и $A(-4; 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{1}{6}$.

При $0 < -a \le \frac{1}{6}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 2a + 1$, имеет две

общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, проходит через точки $M(2;1)$ и $B(-2;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{4}$. При $\frac{1}{6}<-a\le\frac{1}{4}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{1}{4}\le a<-\frac{1}{6}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{1}{4}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{1}{4}$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{6}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 10, 12, 13, 22, 23, 24, 25, 34, 35, 36, 37, 46, 47, 49, 59.

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 10 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{59}{10}$, то есть 5. Кроме того, числа 12 и 13 меньше, чем сумма двух чисел 10, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $59-10-12-13=24$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 10, оставшиеся задуманные числа — это 12 и 12 или 24. Для задуманных чисел 10, 12, 12, 12, 13 и 10, 12, 13, 24 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 10, 12, 12, 12, 13 или 10, 12, 13, 24.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $10^{\sin x}=2^{\sin x}\cdot 5^{-\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

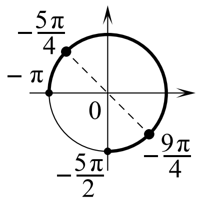
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2^{\sin x}\cdot 5^{\sin x}=2^{\sin x}\cdot 5^{-\cos x};\ 5^{\sin x}=5^{-\cos x};\ \sin x=-\cos x;\ \operatorname{tg}x=-1,$$

откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.



Получим числа: $-\frac{9\pi}{4};-\frac{5\pi}{4}$.

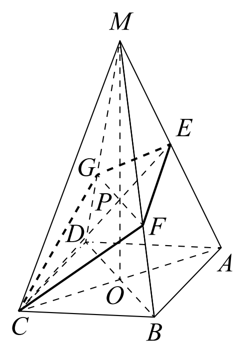
Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{9\pi}{4};-\frac{5\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны $\frac{9}{2}$, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MA. Отрезок CE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MB, G — ребру MD), откуда



$$MF:FB=MG:GD=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}BD=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=3\sqrt{2}.$$

Четырёхугольник $CFEG$ — искомое сечение. Отрезок CE — медиана треугольника MAC, значит,

$$CE=\frac{\sqrt{2AC^2+2MC^2-MA^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MC^2}}{2}=\frac{15}{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали CE и FG четырёхугольника $CFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{CFEG}=\frac{CE\cdot FG}{2}=\frac{45\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{45\sqrt{2}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{3-x}\dfrac{x+4}{(x-3)^2}\ge -2,\\ x^3+6x^2+\dfrac{21x^2+3x-12}{x-4}\le 3.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{3-x}\frac{x+4}{(x-3)^2}\ge -2;\ \log_{3-x}(x+4)-\log_{3-x}(x-3)^2\ge -2;\ \log_{3-x}(x+4)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<3-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{3-x}(x+4)\ge 0,\\ 0<3-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+4\le 1,\\ 2<x<3;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $3-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{3-x}(x+4)\ge 0,\\ 3-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+4\ge 1,\\ x<2,\end{cases}\ \text{откуда } -3\le x<2.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-3\le x<2$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+6x^2+\frac{21x^2+3x-12}{x-4}\le 3;\ x^3+6x^2+\frac{21x^2}{x-4}\le 0;$$

$$\frac{x^4+2x^3-3x^2}{x-4}\le 0;\ \frac{x^2(x-1)(x+3)}{x-4}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -3$; $x = 0$; $1 \le x < 4$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -3$; $x = 0$; $1 \le x < 2$.

Ответ: -3; 0; $[1; 2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 1 и 7 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 22{,}5°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 22{,}5°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 22{,}5° = 2 \cdot \cos 22{,}5°$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 22{,}5° = 14 \cdot \cos 22{,}5°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 12 \cdot \cos 22{,}5°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} =$$
$$= 42 \cdot \cos 22{,}5° \cdot \sin 22{,}5° = \frac{21\sqrt{2}}{2}.$$

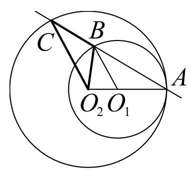


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 16 \cdot \cos 22{,}5°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} =$$
$$= 56 \cdot \cos 22{,}5° \cdot \sin 22{,}5° = 14\sqrt{2}.$$

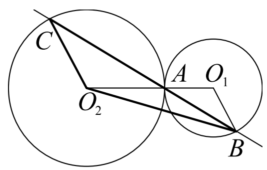


Рис. 2

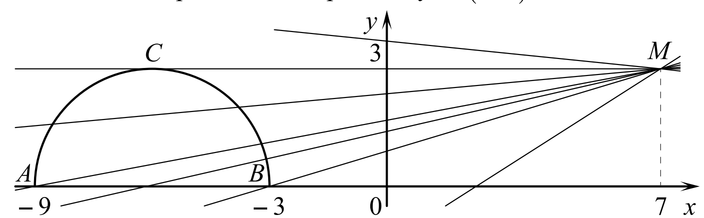
Ответ: $\frac{21\sqrt{2}}{2}$ или $14\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$ax + \sqrt{-27 - 12x - x^2} = 7a + 3$$
имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-27 - 12x - x^2} = -ax + 7a + 3$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{-27 - 12x - x^2}$ и $g(x) = -ax + 7a + 3$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{3^2 - (x+6)^2}$ является полуокружность радиуса 3 с центром в точке $(-6; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(7; 3)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y = -ax + 7a + 3$, проходит через точки $M(7; 3)$ и $A(-9; 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{3}{16}$.

При $0<-a\le\frac{3}{16}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+7a+3$, имеет две общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+7a+3$, проходит через точки $M(7;3)$ и $B(-3;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{3}{10}$. При $\frac{3}{16}<-a\le\frac{3}{10}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+7a+3$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{3}{10}\le a<-\frac{3}{16}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{3}{10}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{3}{10};-\frac{3}{16}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{3}{10}$, $a=-\frac{3}{16}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{3}{10}$ и/или включением точки $a=-\frac{3}{16}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{3}{10}$, $a=-\frac{3}{16}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{3}{10}$, $a=-\frac{3}{16}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

Решение.

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 9 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{52}{9}$, то есть 5. Кроме того, числа 10 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 9, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $52-9-10-11=22$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 9, оставшиеся задуманные числа — это 11 и 11 или 22. Для задуманных чисел 9, 10, 11, 11, 11 и 9, 10, 11, 22 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 9, 10, 11, 11, 11 или 9, 10, 11, 22.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $21^{-\sin x}=3^{-\sin x}\cdot 7^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

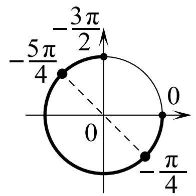
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{-\sin x}\cdot 7^{-\sin x}=3^{-\sin x}\cdot 7^{\cos x};\ 7^{-\sin x}=7^{\cos x};\ -\sin x=\cos x;\ \operatorname{tg} x=-1,$$

откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.



Получим числа: $-\frac{5\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

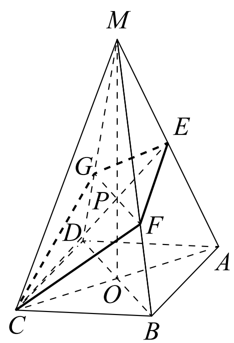
C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MA. Отрезок CE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MB, G — ребру MD), откуда

$$MF:FB=MG:GD=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}BD=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=4\sqrt{2}.$$



Четырёхугольник $CFEG$ — искомое сечение. Отрезок CE — медиана треугольника MAC, значит,

$$CE=\frac{\sqrt{2AC^2+2MC^2-MA^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MC^2}}{2}=6\sqrt{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали CE и FG четырёхугольника $CFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{CFEG}=\frac{CE\cdot FG}{2}=24.$$

Ответ: 24.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{3-x}\dfrac{x+7}{(x-3)^4}\ge -4,\\ x^3+8x^2+\dfrac{18x^2+5x-15}{x-3}\le 5.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{3-x}\frac{x+7}{(x-3)^4}\ge -4;\ \log_{3-x}(x+7)-\log_{3-x}(x-3)^4\ge -4;\ \log_{3-x}(x+7)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<3-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{3-x}(x+7)\ge 0,\\ 0<3-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+7\le 1,\\ 2<x<3;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $3-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{3-x}(x+7)\ge 0,\\ 3-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+7\ge 1,\\ x<2,\end{cases}\ \text{откуда } -6\le x<2.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-6\le x<2$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+8x^2+\frac{18x^2+5x-15}{x-3}\le 5;\ x^3+8x^2+\frac{18x^2}{x-3}\le 0;$$

$$\frac{x^4+5x^3-6x^2}{x-3}\le 0;\ \frac{x^2(x-1)(x+6)}{x-3}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\le -6$; $x=0$; $1\le x<3$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-6$; $x=0$; $1\le x<2$.

Ответ: -6; 0; $[1;2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 1 и 7 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1=22{,}5°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1=\angle BAO_1=\angle CAO_2=\angle ACO_2=22{,}5°$, откуда $AB=2O_1A\cdot\cos 22{,}5°=2\cdot\cos 22{,}5°$, $AC=2O_2A\cdot\cos 22{,}5°=14\cdot\cos 22{,}5°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC=AC-AB=12\cdot\cos 22{,}5°$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=42\cdot\cos 22{,}5°\cdot\sin 22{,}5°=\frac{21\sqrt{2}}{2}.$$

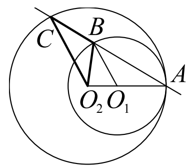


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC=AC+AB=16\cdot\cos 22{,}5°$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=56\cdot\cos 22{,}5°\cdot\sin 22{,}5°=14\sqrt{2}.$$

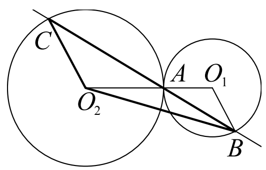


Рис. 2

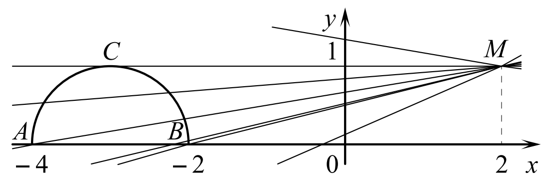
Ответ: $\frac{21\sqrt{2}}{2}$ или $14\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$ax+\sqrt{-8-6x-x^2}=2a+1$$
имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-8-6x-x^2}=-ax+2a+1$. Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{-8-6x-x^2}$ и $g(x)=-ax+2a+1$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{1^2-(x+3)^2}$ является полуокружность радиуса 1 с центром в точке $(-3;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(2;1)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, проходит через точки $M(2;1)$ и $A(-4;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{6}$.

При $0<-a\le\frac{1}{6}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, имеет две

общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, проходит через точки $M(2;1)$ и $B(-2;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{4}$. При $\frac{1}{6}<-a\le\frac{1}{4}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{1}{4}\le a<-\frac{1}{6}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{1}{4}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{1}{4}$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{6}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 8 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{47}{8}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 10 меньше, чем сумма двух чисел 8, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $47-8-9-10=20$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 8, оставшиеся задуманные числа — это 10 и 10 или 20. Для задуманных чисел 8, 9, 10, 10, 10 и 8, 9, 10, 20 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 8, 9, 10, 10, 10 или 8, 9, 10, 20.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $21^{-\sin x}=3^{-\sin x}\cdot 7^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

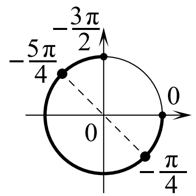
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{-\sin x}\cdot 7^{-\sin x}=3^{-\sin x}\cdot 7^{\cos x};\ 7^{-\sin x}=7^{\cos x};\ -\sin x=\cos x;\ \operatorname{tg} x=-1,$$

откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.



Получим числа: $-\frac{5\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

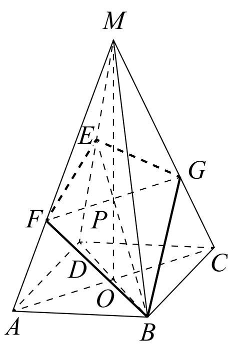
C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF:FA=MG:GC=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=2\sqrt{2}.$$



Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE=\frac{\sqrt{2BD^2+2MB^2-MD^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MB^2}}{2}=5.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{BFEG}=\frac{BE\cdot FG}{2}=5\sqrt{2}.$$

Ответ: $5\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{6-x}\dfrac{x+5}{(x-6)^{12}}\ge -12,\\ x^3+7x^2+\dfrac{30x^2+7x-42}{x-6}\le 7.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{6-x}\frac{x+5}{(x-6)^{12}}\ge -12;\ \log_{6-x}(x+5)-\log_{6-x}(x-6)^{12}\ge -12;\ \log_{6-x}(x+5)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<6-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{6-x}(x+5)\ge 0,\\ 0<6-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+5\le 1,\\ 5<x<6;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $6-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{6-x}(x+5)\ge 0,\\ 6-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+5\ge 1,\\ x<5,\end{cases}\ \text{откуда } -4\le x<5.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-4\le x<5$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+7x^2+\frac{30x^2+7x-42}{x-6}\le 7;\ x^3+7x^2+\frac{30x^2}{x-6}\le 0;$$

$$\frac{x^4+x^3-12x^2}{x-6}\le 0;\ \frac{x^2(x-3)(x+4)}{x-6}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -4$; $x = 0$; $3 \le x < 6$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -4$; $x = 0$; $3 \le x < 5$.

Ответ: -4; 0; $[3; 5)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 5 и 8 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 15°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 15°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 15° = 10 \cdot \cos 15°$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 15° = 16 \cdot \cos 15°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 6 \cdot \cos 15°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = 24 \cdot \cos 15° \cdot \sin 15° = 6.$$

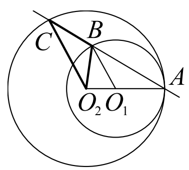


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 26 \cdot \cos 15°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = 104 \cdot \cos 15° \cdot \sin 15° = 26.$$

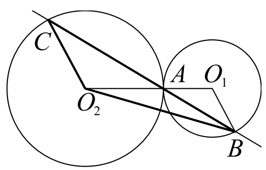


Рис. 2

Ответ: 6 или 26.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

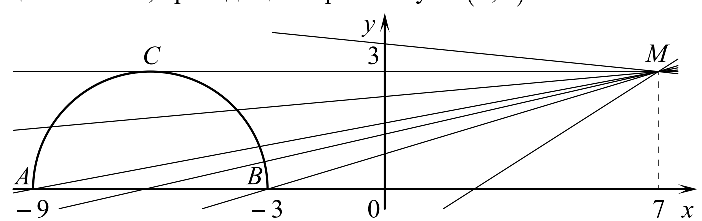
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-27 - 12x - x^2} = 7a + 3$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-27 - 12x - x^2} = -ax + 7a + 3$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{-27 - 12x - x^2}$ и $g(x) = -ax + 7a + 3$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{3^2 - (x+6)^2}$ является полуокружность радиуса 3 с центром в точке $(-6; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(7; 3)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y = -ax + 7a + 3$, проходит через точки $M(7; 3)$ и $A(-9; 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \dfrac{3}{16}$.

При $0 < -a \le \frac{3}{16}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 7a + 3$, имеет две общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y = -ax + 7a + 3$, проходит через точки $M(7;3)$ и $B(-3;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{3}{10}$. При $\frac{3}{16} < -a \le \frac{3}{10}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 7a + 3$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{3}{10} \le a < -\frac{3}{16}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a > \frac{3}{10}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{3}{10}; -\frac{3}{16}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a = -\frac{3}{10}$, $a = -\frac{3}{16}$, $a = 0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a = -\frac{3}{10}$ и/или включением точки $a = -\frac{3}{16}$	3
Обоснованно получены все значения: $a = -\frac{3}{10}$, $a = -\frac{3}{16}$, $a = 0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a = -\frac{3}{10}$, $a = -\frac{3}{16}$ или $a = 0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 29.

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22 - 1 = 21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 5 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{29}{5}$, то есть 5. Кроме того, числа 6 и 8 меньше, чем сумма двух чисел 5, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $29 - 5 - 6 - 8 = 10$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 5, оставшиеся задуманные числа — это 5 и 5 или 10. Для задуманных чисел 5, 5, 5, 6, 8 и 5, 6, 8, 10 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 5, 5, 5, 6, 8 или 5, 6, 8, 10.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $10^{\sin x}=2^{\sin x}\cdot 5^{-\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

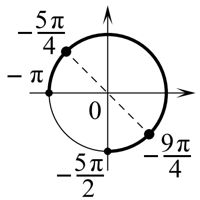
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2^{\sin x}\cdot 5^{\sin x}=2^{\sin x}\cdot 5^{-\cos x};\ 5^{\sin x}=5^{-\cos x};\ \sin x=-\cos x;\ \operatorname{tg} x=-1,$$

откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.



Получим числа: $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

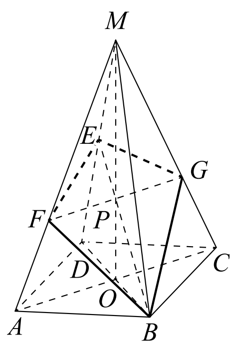
C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF:FA=MG:GC=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=2\sqrt{2}.$$



Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE=\frac{\sqrt{2BD^2+2MB^2-MD^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MB^2}}{2}=5.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{BFEG}=\frac{BE\cdot FG}{2}=5\sqrt{2}.$$

Ответ: $5\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{7-x}\dfrac{x+3}{(x-7)^8}\ge -8,\\ x^3+6x^2+\dfrac{40x^2+3x-24}{x-8}\le 3.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{7-x}\frac{x+3}{(x-7)^8}\ge -8;\ \log_{7-x}(x+3)-\log_{7-x}(x-7)^8\ge -8;\ \log_{7-x}(x+3)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<7-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{7-x}(x+3)\ge 0,\\ 0<7-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+3\le 1,\\ 6<x<7;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $7-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{7-x}(x+3)\ge 0,\\ 7-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+3\ge 1,\\ x<6,\end{cases}\ \text{откуда } -2\le x<6.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-2\le x<6$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+6x^2+\frac{40x^2+3x-24}{x-8}\le 3;\ x^3+6x^2+\frac{40x^2}{x-8}\le 0;$$

$$\frac{x^4-2x^3-8x^2}{x-8}\le 0;\ \frac{x^2(x-4)(x+2)}{x-8}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -2$; $x = 0$; $4 \le x < 8$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -2$; $x = 0$; $4 \le x < 6$.

Ответ: -2; 0; $[4; 6)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 2 и 3 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 30°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 30° = 2\sqrt{3}$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 30° = 3\sqrt{3}$.

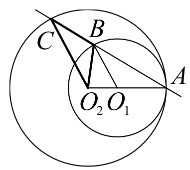


Рис. 1

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = \sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

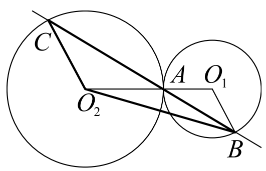


Рис. 2

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 5\sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ или $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

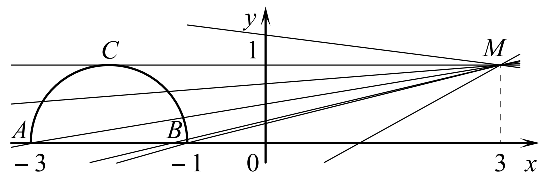
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-3 - 4x - x^2} = 3a + 1$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-3 - 4x - x^2} = -ax + 3a + 1$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{-3 - 4x - x^2}$ и $g(x) = -ax + 3a + 1$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{1^2 - (x+2)^2}$ является полуокружность радиуса 1 с центром в точке $(-2; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(3; 1)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y = -ax + 3a + 1$, проходит через точки $M(3; 1)$ и $A(-3; 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{1}{6}$. При $0 < -a \le \frac{1}{6}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 3a + 1$, имеет две общие

точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+3a+1$, проходит через точки $M(3;1)$ и $B(-1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{4}$. При $\frac{1}{6}<-a\le\frac{1}{4}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+3a+1$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{1}{4}\le a<-\frac{1}{6}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{1}{4}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{1}{4}$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{6}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41-7-9-11=14$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 7 и 7 или 14. Для задуманных чисел 7, 7, 7, 9, 11 и 7, 9, 11, 14 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 7, 7, 7, 9, 11 или 7, 9, 11, 14.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $14^{\cos x}=2^{\cos x}\cdot 7^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

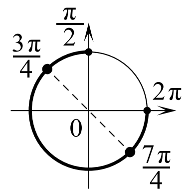
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2^{\cos x}\cdot 7^{\cos x}=2^{\cos x}\cdot 7^{-\sin x};\ 7^{\cos x}=7^{-\sin x};\ \cos x=-\sin x;\ \operatorname{tg} x=-1,$$

откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.



Получим числа: $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.

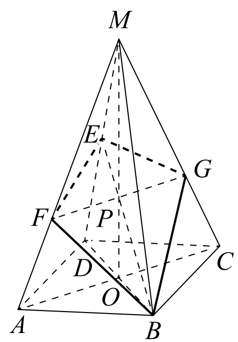
Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 4, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда



$$MF:FA=MG:GC=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE=\frac{\sqrt{2BD^2+2MB^2-MD^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MB^2}}{2}=4\sqrt{2}.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{BFEG}=\frac{BE\cdot FG}{2}=\frac{32}{3}.$$

Ответ: $\frac{32}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{7-x}\dfrac{x+3}{(x-7)^8}\ge -8,\\ x^3+6x^2+\dfrac{40x^2+3x-24}{x-8}\le 3.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{7-x}\frac{x+3}{(x-7)^8}\ge -8;\ \log_{7-x}(x+3)-\log_{7-x}(x-7)^8\ge -8;\ \log_{7-x}(x+3)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<7-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{7-x}(x+3)\ge 0,\\ 0<7-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+3\le 1,\\ 6<x<7;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $7-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{7-x}(x+3)\ge 0,\\ 7-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+3\ge 1,\\ x<6,\end{cases}\ \text{откуда } -2\le x<6.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-2\le x<6$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+6x^2+\frac{40x^2+3x-24}{x-8}\le 3;\ x^3+6x^2+\frac{40x^2}{x-8}\le 0;$$

$$\frac{x^4-2x^3-8x^2}{x-8}\le 0;\ \frac{x^2(x-4)(x+2)}{x-8}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -2$; $x = 0$; $4 \le x < 8$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -2$; $x = 0$; $4 \le x < 6$.

Ответ: -2; 0; $[4; 6)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 3 и 5 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 15°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 15°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 15° = 6 \cdot \cos 15°$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 15° = 10 \cdot \cos 15°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 4 \cdot \cos 15°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = 10 \cdot \cos 15° \cdot \sin 15° = 2{,}5.$$

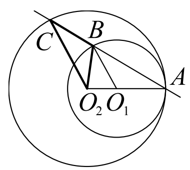


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 16 \cdot \cos 15°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = 40 \cdot \cos 15° \cdot \sin 15° = 10.$$

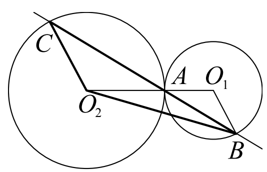


Рис. 2

Ответ: 2,5 или 10.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

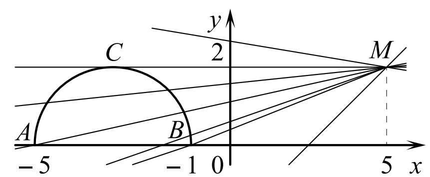
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-5 - 6x - x^2} = 5a + 2$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-5 - 6x - x^2} = -ax + 5a + 2$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{-5 - 6x - x^2}$ и $g(x) = -ax + 5a + 2$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{2^2 - (x+3)^2}$ является полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-3; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(5; 2)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y = -ax + 5a + 2$, проходит через точки $M(5; 2)$ и $A(-5; 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{1}{5}$.

При $0 < -a \le \frac{1}{5}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 5a + 2$, имеет две

общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+5a+2$, проходит через точки $M(5;2)$ и $B(-1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{3}$. При $\frac{1}{5}<-a\le\frac{1}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+5a+2$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{1}{3}\le a<-\frac{1}{5}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{1}{3}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3};-\frac{1}{5}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{3}$, $a=-\frac{1}{5}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{1}{3}$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{5}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{3}$, $a=-\frac{1}{5}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{1}{3}$, $a=-\frac{1}{5}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41-7-9-11=14$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 7 и 7 или 14. Для задуманных чисел 7, 7, 7, 9, 11 и 7, 9, 11, 14 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 7, 7, 7, 9, 11 или 7, 9, 11, 14.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $15^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi;\frac{13\pi}{2}\right]$.

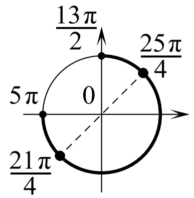
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{\cos x}\cdot 5^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x};\ 5^{\cos x}=5^{\sin x};\ \cos x=\sin x;\ \operatorname{tg} x=1,$$

откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi;\frac{13\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$.

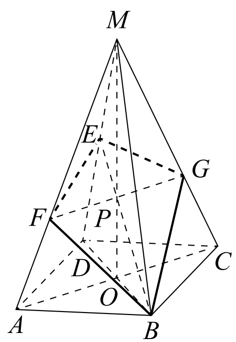
Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 4, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда



$$MF:FA=MG:GC=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE=\frac{\sqrt{2BD^2+2MB^2-MD^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MB^2}}{2}=4\sqrt{2}.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{BFEG}=\frac{BE\cdot FG}{2}=\frac{32}{3}.$$

Ответ: $\frac{32}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{3-x}\frac{x+4}{(x-3)^2}\ge -2,\\ x^3+6x^2+\frac{21x^2+3x-12}{x-4}\le 3.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{3-x}\frac{x+4}{(x-3)^2}\ge -2;\ \log_{3-x}(x+4)-\log_{3-x}(x-3)^2\ge -2;\ \log_{3-x}(x+4)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<3-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{3-x}(x+4)\ge 0,\\ 0<3-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+4\le 1,\\ 2<x<3;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $3-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{3-x}(x+4)\ge 0,\\ 3-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+4\ge 1,\\ x<2,\end{cases}\ \text{откуда } -3\le x<2.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-3\le x<2$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+6x^2+\frac{21x^2+3x-12}{x-4}\le 3;\ x^3+6x^2+\frac{21x^2}{x-4}\le 0;$$

$$\frac{x^4+2x^3-3x^2}{x-4}\le 0;\ \frac{x^2(x-1)(x+3)}{x-4}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\le -3$; $x=0$; $1\le x<4$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-3$; $x=0$; $1\le x<2$.

Ответ: $-3;\ 0;\ [1;2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 2 и 10 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 22{,}5°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1=\angle BAO_1=\angle CAO_2=\angle ACO_2=22{,}5°$, откуда $AB=2O_1A\cdot\cos 22{,}5°=4\cdot\cos 22{,}5°$, $AC=2O_2A\cdot\cos 22{,}5°=20\cdot\cos 22{,}5°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC=AC-AB=16\cdot\cos 22{,}5°$.

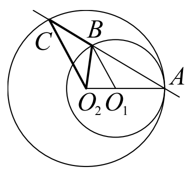


Рис. 1

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=80\cdot\cos 22{,}5°\cdot\sin 22{,}5°=20\sqrt{2}.$$

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC=AC+AB=24\cdot\cos 22{,}5°$.

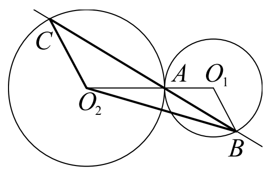


Рис. 2

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=120\cdot\cos 22{,}5°\cdot\sin 22{,}5°=30\sqrt{2}.$$

Ответ: $20\sqrt{2}$ или $30\sqrt{2}$.

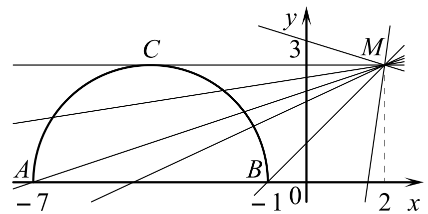
Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$ax+\sqrt{-7-8x-x^2}=2a+3$$
имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-7-8x-x^2}=-ax+2a+3$. Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{-7-8x-x^2}$ и $g(x)=-ax+2a+3$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{3^2-(x+4)^2}$ является полуокружность радиуса 3 с центром в точке $(-4;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(2;3)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.



Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, проходит через точки $M(2;3)$ и $A(-7;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{3}$.

При $0<-a\le\frac{1}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, имеет две

общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, проходит через точки $M(2;3)$ и $B(-1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=1$. При $\frac{1}{3}<-a\le 1$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-1\le a<-\frac{1}{3}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>1$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-1;-\frac{1}{3}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-1$, $a=-\frac{1}{3}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-1$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{3}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-1$, $a=-\frac{1}{3}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-1$, $a=-\frac{1}{3}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 10, 12, 13, 22, 23, 24, 25, 34, 35, 36, 37, 46, 47, 49, 59.

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 10 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{59}{10}$, то есть 5. Кроме того, числа 12 и 13 меньше, чем сумма двух чисел 10, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $59-10-12-13=24$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 10, оставшиеся задуманные числа — это 12 и 12 или 24. Для задуманных чисел 10, 12, 12, 12, 13 и 10, 12, 13, 24 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 10, 12, 12, 12, 13 или 10, 12, 13, 24.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 а) Решите уравнение $20^{\cos x}=4^{\cos x}\cdot 5^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};-3\pi\right]$.

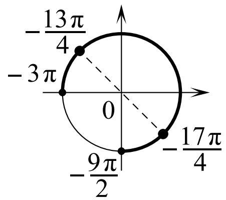
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$4^{\cos x}\cdot 5^{\cos x}=4^{\cos x}\cdot 5^{-\sin x};\ 5^{\cos x}=5^{-\sin x};\ \cos x=-\sin x;\ \operatorname{tg} x=-1,$$

откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};-3\pi\right]$.



Получим числа: $-\frac{17\pi}{4};\ -\frac{13\pi}{4}$.

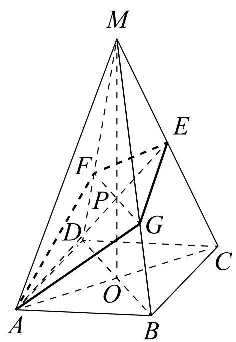
Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{4};\ -\frac{13\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 5. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку A и середину ребра MC параллельно прямой BD.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MC. Отрезок AE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MD, G — ребру MB), откуда



$$MF:FD=MG:GB=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}BD=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=4\sqrt{2}.$$

Четырёхугольник $AFEG$ — искомое сечение. Отрезок AE — медиана треугольника MAC, значит,

$$AE=\frac{\sqrt{2AC^2+2MA^2-MC^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MA^2}}{2}=\frac{13}{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали AE и FG четырёхугольника $AFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{AFEG}=\frac{AE\cdot FG}{2}=13\sqrt{2}.$$

Ответ: $13\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{4-x}\dfrac{x+6}{(x-4)^6}\ge -6,\\ x^3+9x^2+\dfrac{40x^2+2x-10}{x-5}\le 2.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{4-x}\frac{x+6}{(x-4)^6}\ge -6;\ \log_{4-x}(x+6)-\log_{4-x}(x-4)^6\ge -6;\ \log_{4-x}(x+6)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<4-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+6)\ge 0,\\ 0<4-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+6\le 1,\\ 3<x<4;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $4-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+6)\ge 0,\\ 4-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+6\ge 1,\\ x<3,\end{cases}\ \text{откуда } -5\le x<3.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-5\le x<3$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+9x^2+\frac{40x^2+2x-10}{x-5}\le 2;\ x^3+9x^2+\frac{40x^2}{x-5}\le 0;$$

$$\frac{x^4+4x^3-5x^2}{x-5}\le 0;\ \frac{x^2(x-1)(x+5)}{x-5}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\le -5$; $x=0$; $1\le x<5$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-5$; $x=0$; $1\le x<3$.

Ответ: -5; 0; $[1;3)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 5 и 8 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1=15°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1=\angle BAO_1=\angle CAO_2=\angle ACO_2=15°$, откуда $AB=2O_1A\cdot\cos15°=10\cdot\cos15°$, $AC=2O_2A\cdot\cos15°=16\cdot\cos15°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC=AC-AB=6\cdot\cos15°$.

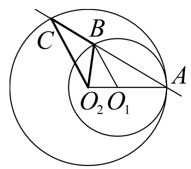


Рис. 1

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=24\cdot\cos15°\cdot\sin15°=6.$$

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC=AC+AB=26\cdot\cos15°$.

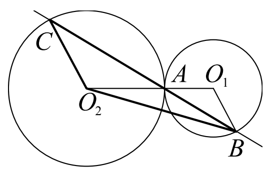


Рис. 2

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=104\cdot\cos15°\cdot\sin15°=26.$$

Ответ: 6 или 26.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

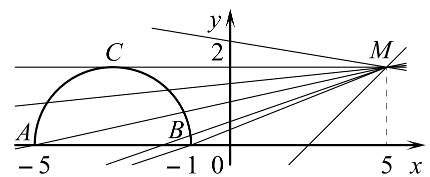
$$ax+\sqrt{-5-6x-x^2}=5a+2$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-5-6x-x^2}=-ax+5a+2$. Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{-5-6x-x^2}$ и $g(x)=-ax+5a+2$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{2^2-(x+3)^2}$ является полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-3;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(5;2)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.



Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+5a+2$, проходит через точки $M(5;2)$ и $A(-5;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{5}$.

При $0<-a\le\frac{1}{5}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+5a+2$, имеет две

общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+5a+2$, проходит через точки $M(5;2)$ и $B(-1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{3}$. При $\frac{1}{5}<-a\le\frac{1}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+5a+2$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{1}{3}\le a<-\frac{1}{5}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{1}{3}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3};-\frac{1}{5}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{3}$, $a=-\frac{1}{5}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{1}{3}$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{5}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{3}$, $a=-\frac{1}{5}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{1}{3}$, $a=-\frac{1}{5}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

Решение.

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 8 и 10 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41-7-8-10=16$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 8 и 8 или 16. Для задуманных чисел 7, 8, 8, 8, 10 и 7, 8, 10, 16 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 7, 8, 8, 8, 10 или 7, 8, 10, 16.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $20^{\cos x} = 4^{\cos x} \cdot 5^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

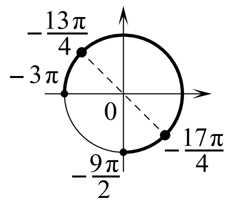
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$4^{\cos x} \cdot 5^{\cos x} = 4^{\cos x} \cdot 5^{-\sin x};\ 5^{\cos x} = 5^{-\sin x};\ \cos x = -\sin x;\ \operatorname{tg} x = -1,$$

откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

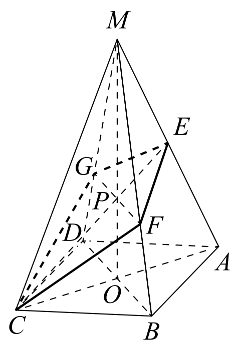


Получим числа: $-\frac{17\pi}{4}$; $-\frac{13\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{4}$; $-\frac{13\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.



Решение.

Пусть точка E — середина ребра MA. Отрезок CE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO = 2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MB, G — ребру MD), откуда

$$MF:FB = MG:GD = MP:PO = 2:1;$$

$$FG = \frac{2}{3}BD = \frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3} = 4\sqrt{2}.$$

Четырёхугольник $CFEG$ — искомое сечение. Отрезок CE — медиана треугольника MAC, значит,

$$CE = \frac{\sqrt{2AC^2 + 2MC^2 - MA^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MC^2}}{2} = 6\sqrt{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали CE и FG четырёхугольника $CFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{CFEG} = \frac{CE \cdot FG}{2} = 24.$$

Ответ: 24.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3-x} \dfrac{x+7}{(x-3)^4} \ge -4, \\ x^3 + 8x^2 + \dfrac{18x^2 + 5x - 15}{x-3} \le 5. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{3-x} \frac{x+7}{(x-3)^4} \ge -4;\ \log_{3-x}(x+7) - \log_{3-x}(x-3)^4 \ge -4;\ \log_{3-x}(x+7) \ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 3 - x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+7) \ge 0, \\ 0 < 3 - x < 1; \end{cases} \begin{cases} 0 < x + 7 \le 1, \\ 2 < x < 3; \end{cases} \text{ нет решений.}$$

Второй случай: $3 - x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+7) \ge 0, \\ 3 - x > 1; \end{cases} \begin{cases} x + 7 \ge 1, \\ x < 2, \end{cases} \text{ откуда } -6 \le x < 2.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-6 \le x < 2$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 8x^2 + \frac{18x^2 + 5x - 15}{x-3} \le 5;\ x^3 + 8x^2 + \frac{18x^2}{x-3} \le 0;$$

$$\frac{x^4 + 5x^3 - 6x^2}{x-3} \le 0;\ \frac{x^2(x-1)(x+6)}{x-3} \le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -6$; $x = 0$; $1 \le x < 3$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-6$; $x=0$; $1\le x<2$.

Ответ: -6; 0; $[1;2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 3 и 5 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1=15°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1=\angle BAO_1=\angle CAO_2=\angle ACO_2=15°$, откуда $AB=2O_1A\cdot\cos15°=6\cdot\cos15°$, $AC=2O_2A\cdot\cos15°=10\cdot\cos15°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC=AC-AB=4\cdot\cos15°$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=10\cdot\cos15°\cdot\sin15°=2{,}5.$$

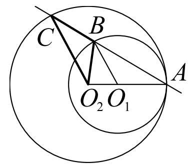


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC=AC+AB=16\cdot\cos15°$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=40\cdot\cos15°\cdot\sin15°=10.$$

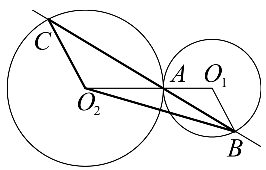


Рис. 2

Ответ: 2,5 или 10.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

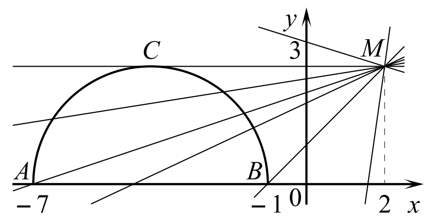
$$ax+\sqrt{-7-8x-x^2}=2a+3$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-7-8x-x^2}=-ax+2a+3$. Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{-7-8x-x^2}$ и $g(x)=-ax+2a+3$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{3^2-(x+4)^2}$ является полуокружность радиуса 3 с центром в точке $(-4;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(2;3)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.



Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, проходит через точки $M(2;3)$ и $A(-7;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\dfrac{1}{3}$.

При $0<-a\le\dfrac{1}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, имеет две общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, проходит через точки $M(2;3)$ и $B(-1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=1$. При $\frac{1}{3}<-a\le 1$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-1\le a<-\frac{1}{3}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>1$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-1;-\frac{1}{3}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-1$, $a=-\frac{1}{3}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-1$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{3}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-1$, $a=-\frac{1}{3}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-1$, $a=-\frac{1}{3}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 29.

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 5 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{29}{5}$, то есть 5. Кроме того, числа 6 и 8 меньше, чем сумма двух чисел 5, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $29-5-6-8=10$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 5, оставшиеся задуманные числа — это 5 и 5 или 10. Для задуманных чисел 5, 5, 5, 6, 8 и 5, 6, 8, 10 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 5, 5, 5, 6, 8 или 5, 6, 8, 10.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4