

1. ЧИСЛА, ДРОБИ, МОДУЛИ

Множества:

\emptyset - пустое множество

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$ - множество натуральных чисел $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ - множество целых чисел

$Q = \left\{ \frac{n}{m}, n, m \in Z, m \neq 0 \right\}$ - множество рациональных чисел (дробей)

R – множество вещественных (действительных) чисел

Арифметические операции с дробями:

$$a:b = \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a:c}{b:c}, c \neq 0; \quad \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}; \quad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc};$$
$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd};$$

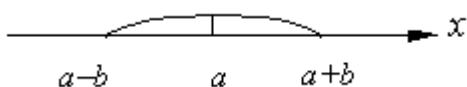
$$\text{Пропорция: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc;$$

Модуль числа:

$$\text{Определение: } |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Свойства модуля:

$$|a| = |-a| = \sqrt{a^2}, |ab| = |a| \cdot |b|, |a + b| \leq |a| + |b|, |a - b| \geq |a| - |b|,$$
$$|x - a| < b \Leftrightarrow a - b < x < a + b (b > 0),$$



$$|x - a| > b \Leftrightarrow x < a - b \text{ или } x > a + b \quad (b > 0).$$



2. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b);$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b);$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$

3. СТЕПЕНИ И КОРНИ

$$\begin{aligned} a^0 &= 1; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad a^n b^n = (ab)^n; \quad a^n \cdot a^k = a^{n+k}; \quad a^n : a^k = a^{n-k}; \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n; \\ (a^n)^k &= a^{nk}; \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}; \quad (\sqrt[k]{a})^n = a^{\frac{n}{k}}; \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \end{aligned}$$

Показательные неравенства:

$$a^c < a^d \Rightarrow \begin{cases} c < d, & \text{если } a > 1 \\ c > d, & \text{если } 0 < a < 1 \end{cases}.$$

4. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{где } D = b^2 - 4ac - \text{дискриминант.}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \\ \text{Формулы Виета:} \end{aligned}$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения.

Разложение квадратного трехчлена на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$\text{Приведенное уравнение: } x^2 + px + q = 0, \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Квадратное неравенство:

если $D > 0$, $a > 0$, $x_1 < x_2$, то

$$ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty) \text{ - "решение за корнями"}$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow x \in (x_1, x_2) \text{ - "решение между корнями",}$$

где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена.

5. ПРОГРЕССИИ

Арифметическая прогрессия: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Общий член: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, $n = 1, 2, 3, \dots$, где d - разность прогрессии;

$$a_n = a_{n-1} + d = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Геометрическая прогрессия: $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$

Общий член: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, где q - знаменатель прогрессии;

$$b_n = b_{n-1} \cdot q = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n b_k = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot b_1$$

Сумма бесконечно-убывающей геометрической прогрессии (при $|q| < 1$):

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \frac{b_1}{1-q}$$

Некоторые суммы:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}; 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2;$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6};$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2;$$

6. ЛОГАРИФМЫ

Логарифм числа b по основанию a :

$$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c, \quad b > 0, a > 0, a \neq 1$$

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$

Свойства логарифмов:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c, \quad \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad \log_a b^n = n \cdot \log_a b, \quad \log_a b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$$

Десятичные логарифмы ($a = 10$), $\log_{10} b = \lg b$

Натуральные логарифмы ($a = e = 2,71828\dots$), $\log_e b = \ln b$

Логарифмическое неравенство:

$$\log_a c < \log_a d \Rightarrow \begin{cases} c < d, & \text{если } a > 1 \\ c > d, & \text{если } 0 < a < 1 \end{cases}$$

7. ТРИГОНОМЕТРИЯ

7.1. Основные соотношения

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1;$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

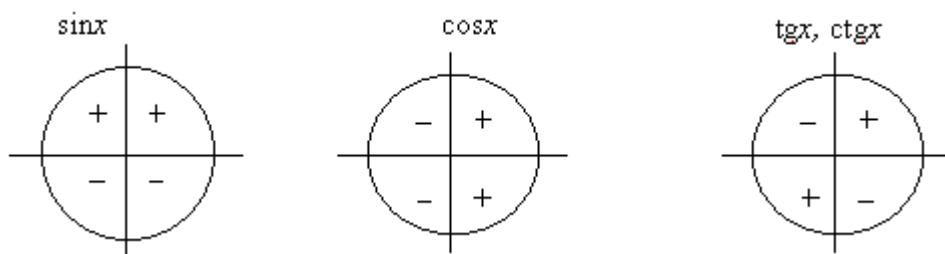
7.2. Перевод из радианной меры углов в градусную и обратно:

$$\alpha_{\text{рад}} = \frac{\alpha_{\text{град}} \cdot \pi}{180}; \quad \alpha_{\text{град}} = \frac{\alpha_{\text{рад}} \cdot 180}{\pi};$$

7.3. Основные значения тригонометрических функций

	0 0°	$\pi/6$ 30°	$\pi/4$ 45°	$\pi/3$ 60°	$\pi/2$ 90°	π 180°	$3/2\pi$ 270°	2π 360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

7.4. Знаки тригонометрических функций



7.5. Формулы сложения

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}; \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}; \quad \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha};$$

7.6. Формулы двойных углов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha};$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot \sin \varphi;$$

7.7. Формулы тройных углов

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1};$$

7.8. Формулы половинных углов

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}; \quad \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}};$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}; \quad \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}},$$

Универсальная тригонометрическая подстановка, используемая для решения тригонометрических уравнений:

$$t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; \quad \sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1-t^2};$$

7.9. Формулы приведения

	$-\varphi$	$\frac{\pi}{2} \pm \varphi$	$\pi \pm \varphi$	$\frac{3}{2}\pi \pm \varphi$	$2\pi \pm \varphi$
\sin	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\mp \sin \varphi$	$-\cos \varphi$	$\pm \sin \varphi$
\cos	$\cos \varphi$	$\mp \sin \varphi$	$-\cos \varphi$	$\pm \sin \varphi$	$\cos \varphi$
tg	$-\operatorname{tg} \varphi$	$\mp \operatorname{ctg} \varphi$	$\pm \operatorname{tg} \varphi$	$\mp \operatorname{ctg} \varphi$	$\pm \operatorname{tg} \varphi$
ctg	$-\operatorname{ctg} \varphi$	$\mp \operatorname{tg} \varphi$	$\pm \operatorname{ctg} \varphi$	$\mp \operatorname{tg} \varphi$	$\pm \operatorname{ctg} \varphi$

7.10. Формулы преобразования суммы и разности

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = A \sin(\alpha + \varphi), \text{ где } A = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \arctg \frac{b}{a};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}, \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}, \quad \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

7.11. Формулы преобразования произведения

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

7.12. Обратные тригонометрические функции

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\operatorname{arcctg} x = \pi - \operatorname{arcctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

7.13. Простейшие тригонометрические уравнения

$$1) \sin x = a, a \in [-1; 1]; \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n = \begin{cases} \arcsin a + 2\pi n \\ \pi - \arcsin a + 2\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи: $\sin x = 0; x = \pi n;$

$$\sin x = 1; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\sin x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

$$2) \cos x = a, a \in [-1; 1]; \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Частные случаи: } \cos x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$\cos x = 1; x = 2\pi n;$$

$$\cos x = -1; x = \pi + 2\pi n.$$

$$3) \operatorname{tg} x = a, a \in (-\infty; +\infty); x = \operatorname{arctg} a + \pi n$$

$$4) \operatorname{ctgx} = a, a \in (-\infty; +\infty); x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$$

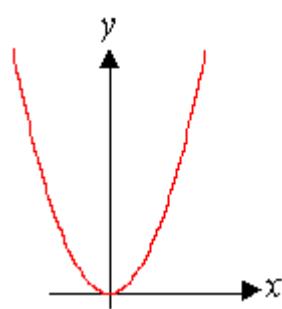
8. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

8.1. Таблица основных элементарных функций

	Название	Формула	Частные случаи
1	Постоянная	$y = c$	$y = 0$
2	Степенная функция	$y = x^n$	$y = x;$ $y = x^2; y = x^3;$ $y = x^{-1}; y = \sqrt[n]{x}$
3	Показательная функция	$y = a^x, a > 0, a \neq 1$	$y = e^x = \exp(x)$
4	Логарифмическая функция	$y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$	$y = \ln x;$ $y = \lg x$
5	Тригонометрические функции	$y = \sin x, y = \cos x;$ $y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctgx}$	
6	Обратные тригонометрические функции	$y = \operatorname{arcsin} x;$ $y = \operatorname{arccos} x;$ $y = \operatorname{arctg} x; y = \operatorname{arcctg} x$	

8.2. Графики основных элементарных функций

Парабола $y = x^2$



Гипербола $y = \frac{1}{x}$

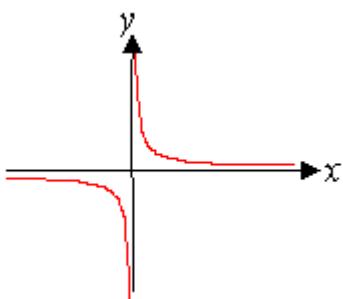


График показательной функции

$$y = a^x$$

$$0 < a < 1$$

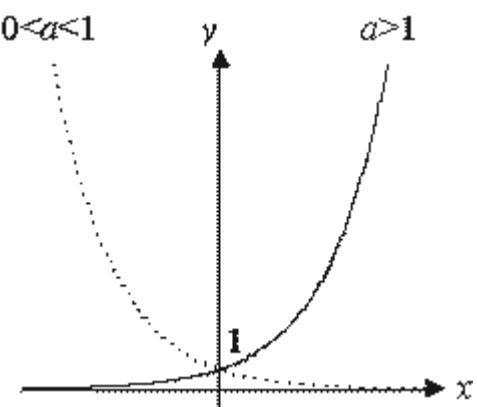
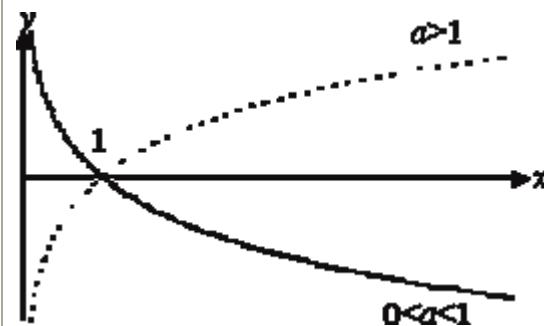


График логарифмической функции

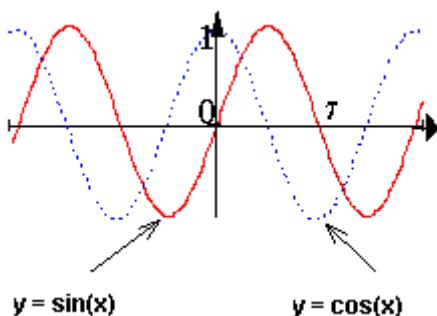
$$y = \log_a x$$

$$a > 1$$

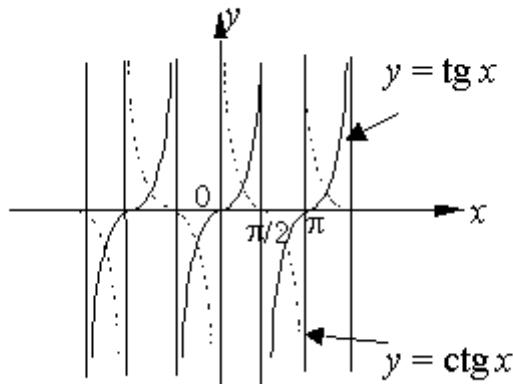
$$0 < a < 1$$



Синусоида $y = \sin x$ и косинусоида $y = \cos x$



Тангенсоида $y = \operatorname{tg} x$ и котангенсоида $y = \operatorname{ctg} x$



9. ПЛАНИМЕТРИЯ

1. Треугольник

Обозначения:

вершины: A, B, C ;

стороны: a, b, c ;

внутренние углы: α, β, γ ;

полупериметр: $p = (a + b + c)/2$

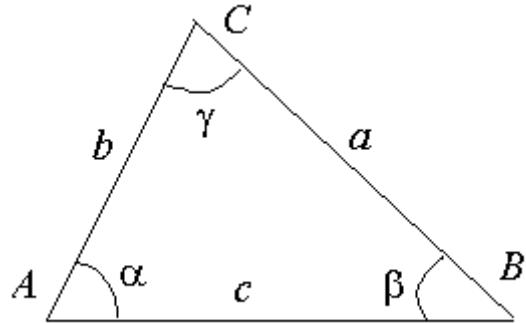
,

радиус вписанной окружности: r ,

радиус описанной окружности:

R ,

площадь: S .



9.1.1. Основные величины и соотношения

Неравенства треугольника: $a + b > c; a + c > b; b + c > a$.

Сумма внутренних углов треугольника: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$;

теорема проекций: $c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha$;

теорема синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$;

теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$;

9.1.2. Замечательные точки и линии в треугольнике

Точка пересечения медиан треугольника – центр тяжести.

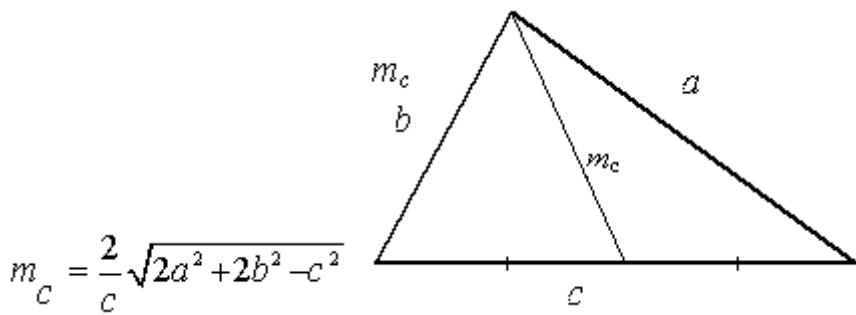
Точка пересечения высот – ортоцентр.

Точка пересечения биссектрис – центр вписанной окружности.

Точка пересечения серединных перпендикуляров – центр описанной окружности.

Медианы, проведенные из

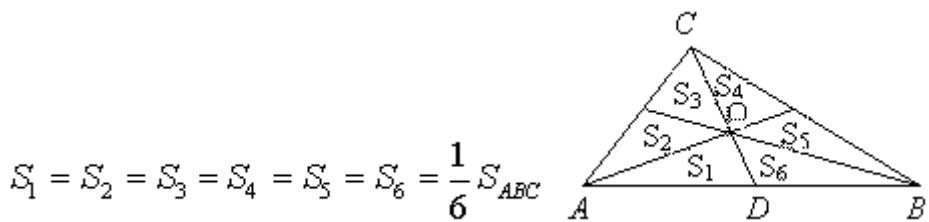
вершин A, B, C соответственно: m_a, m_b, m_c



Разбиение треугольника медианами:

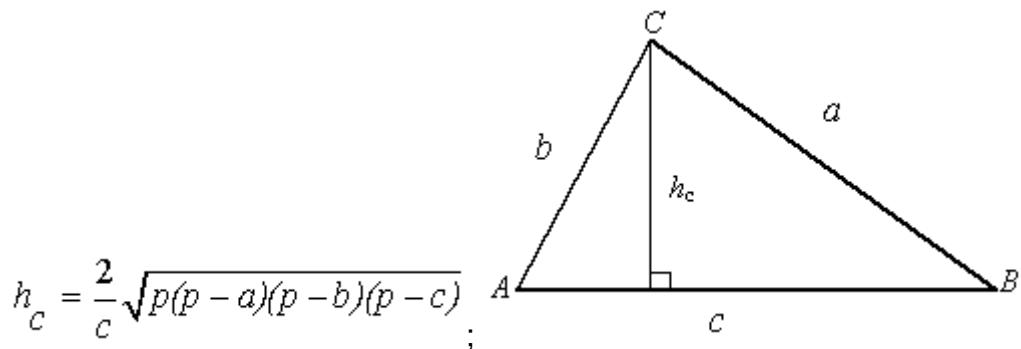
$$OC = 2 \cdot OD;$$

$$S_{ACD} = S_{BCD} = \frac{1}{2} S_{ABC};$$



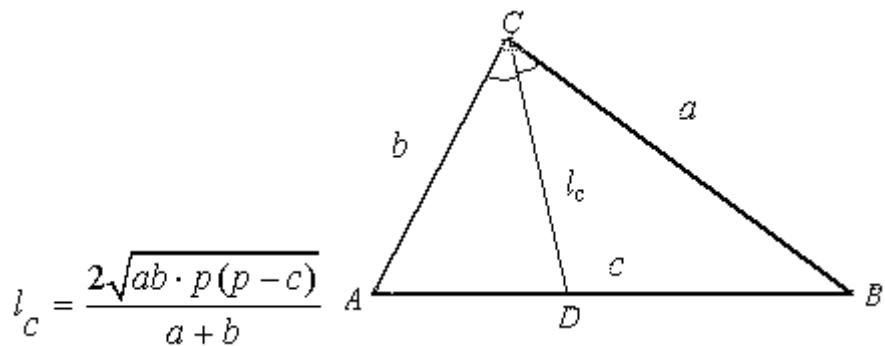
Высоты, проведенные из

вершин A, B, C соответственно: h_a, h_b, h_c



$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

Биссектрисы, проведенные из
вершин A, B, C соответственно: l_a, l_b, l_c



Свойство биссектрисы треугольника:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{CB}{DB}$$

9.1.3. Формулы площади треугольника

$$S = \frac{h_c \cdot c}{2}; \quad S = \frac{a \cdot b}{2} \sin \gamma;$$

$$S = p \cdot r; \quad S = \frac{abc}{4R};$$

Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

9.1.4. Прямоугольный треугольник

Катеты: a, b ; гипотенуза: c .

Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$

Соотношения между элементами:

$$a = c \cdot \sin \alpha; b = c \cdot \cos \alpha;$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$

$$r = \frac{a + b - c}{2}; R = \frac{c}{2};$$

$$S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2};$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} \text{ или } \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB},$$

$$CD = \frac{AC \cdot BC}{AB}$$

где $CD = h_c$ - высота, опущенная на гипотенузу,

Подобия в прямоугольном треугольнике:

$$\Delta ACD; \Delta ABC; \frac{b}{c} = \frac{h}{a} = \frac{b_c}{b};$$

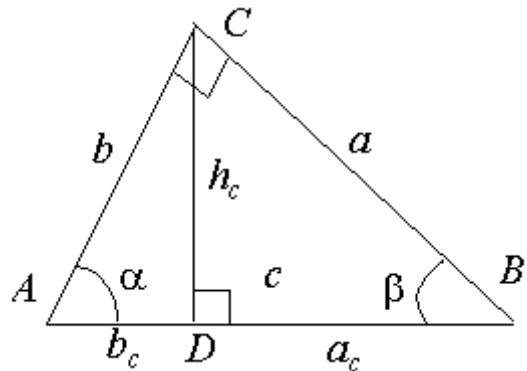
$$\Delta BCD; \Delta ABC; \frac{a}{c} = \frac{h}{b} = \frac{a_c}{a};$$

$$\Delta ACD; \Delta BCD; \frac{b}{a} = \frac{b_c}{h} = \frac{h}{a_c}.$$

9.1.5. Правильный треугольник

$$p=3a/2;$$

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ;$$



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad R = 2r; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

9.2. Четырехугольники

Обозначения:

S – площадь, R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанной окружности, d – диагональ.

9.2.1. Квадрат

$$S=a^2;$$

$$S = \frac{d^2}{2};$$

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad r = \frac{a}{2}$$

9.2.2. Прямоугольник

$$p=a+b \quad (p - \text{полупериметр})$$

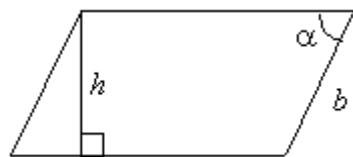
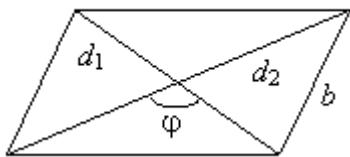
$$S=ab$$

9.2.3. Параллелограмм

$$p=a+b \quad (p - \text{полупериметр})$$

$$S = a \cdot h$$

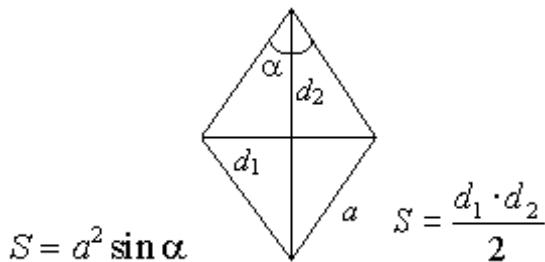
$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot \sin \varphi$$



$$S = ab \cdot \sin \alpha$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

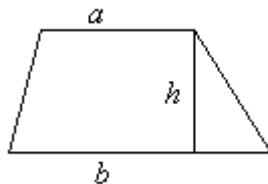
9.2.4. Ромб



$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

9.2.6. Трапеция

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$$



$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot \sin \varphi$$

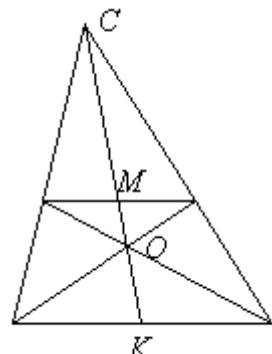


Свойства трапеции:

1. Во всякой трапеции середины оснований K ,

M лежат на прямой, проходящей через точку

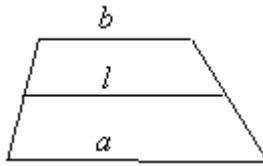
пересечения диагоналей O и точку пересечения



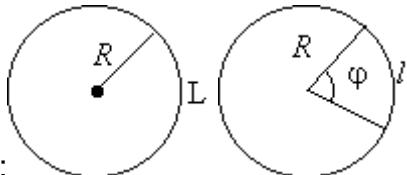
продолжений боковых сторон.

2. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

$$l \parallel a; l \parallel b; l = \frac{a+b}{2}.$$



9.3. Окружность и круг.



Длина окружности: $L = 2\pi r;$

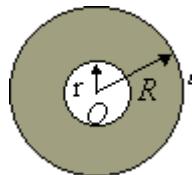
длина дуги окружности:

$$l = \frac{\pi R n}{180}, l = R\varphi,$$

(n - величина дуги в градусах, φ - величина дуги в радианах).

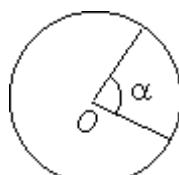
Площадь круга: $S = \pi r^2;$

площадь кольца: $S = \pi(R^2 - r^2);$



площадь сектора: $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360},$

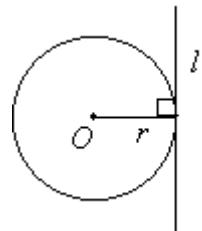
где α - величина дуги в градусах.



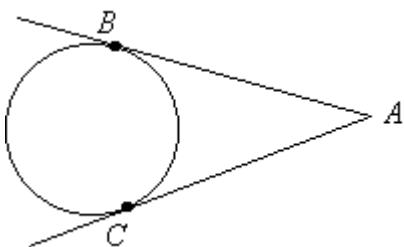
Свойства окружности:

1) касательная и радиус, проведенный в точку касания,

перпендикулярны: $r \perp l.$



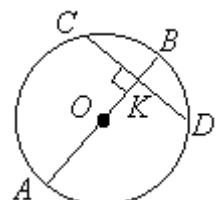
2) отрезки касательных, проведенные к окружности из точки, лежащей вне ее, равны: $AB = AC$



3) диаметр, перпендикулярный хорде,

делит ее пополам;

диаметр, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей:



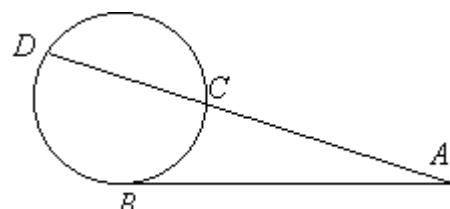
$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow CK = KD.$$

4) квадрат длины касательной равен

произведению длины секущей

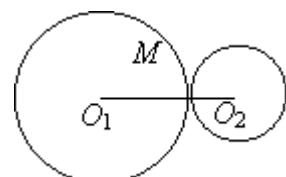
на ее внешнюю часть:

$$AB^2 = AD \cdot AC.$$



5) центры касающихся окружностей O_1, O_2

и точка их касания M лежат на одной прямой.

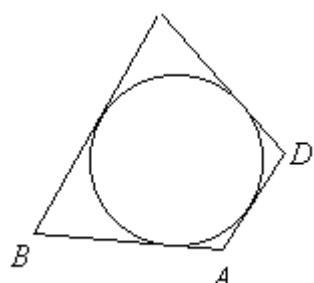


6) в четырехугольник можно вписать окружность

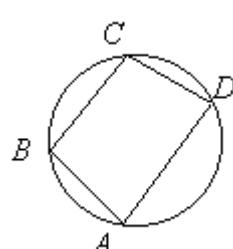
тогда и только тогда, когда

суммы длин противоположных сторон равны:

$$AD + BC = AB + CD.$$



7) около четырехугольника можно описать окружность



тогда и только тогда, когда

сумма противоположных углов равна 180° :

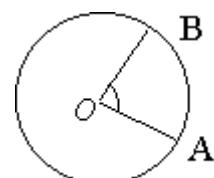
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 180^\circ.$$

- из всех параллелограммов только около прямоугольника можно описать окружность;
- около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая;

8) центральный угол измеряется

градусной мерой дуги, на которую он опирается:

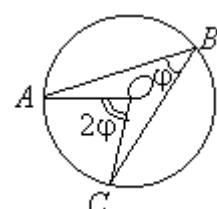
$$\angle AOB = \overarc{AB}$$



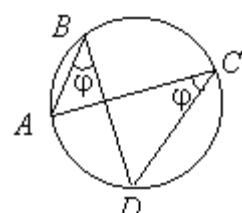
9) величина вписанного угла в два раза меньше

центрального угла, опирающегося на эту же дугу:

$$\angle AOC = 2 \angle ABC$$



10) вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же



дугу, имеют одинаковую величину:

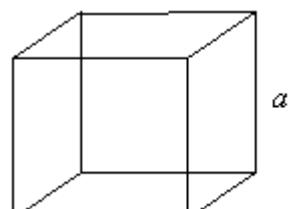
$$\angle ABD = \angle ACD.$$

10. СТЕРЕОМЕТРИЯ

10.1. Куб

Объем: $V = a^3$.

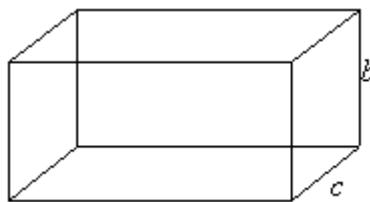
Площадь поверхности: $S = 6a^2$.



10.2. Параллелепипед

Объем: $V = S_{\text{осн}} \cdot h$,

где $S_{\text{осн}}$ - площадь основания,



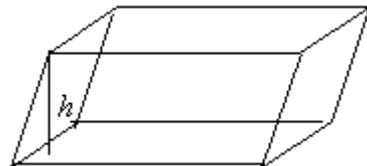
h – высота.

Прямоугольный параллелепипед

Объем: $V = abc$.

Площадь поверхности:

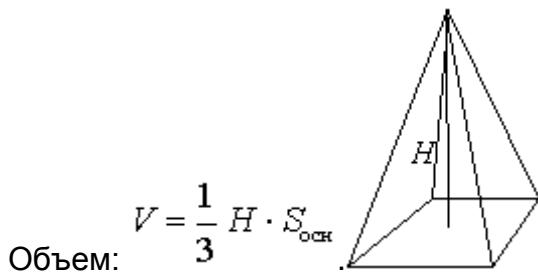
$$S = 2(ab + bc + ac);$$



$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

где d - диагональ.

10.3. Пирамида



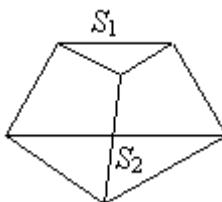
$$V = \frac{1}{3} H \cdot S_{\text{осн}}$$

Объем:

10.4. Усеченная пирамида

$$V = \frac{1}{3} H \cdot (S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2)$$

Объем:



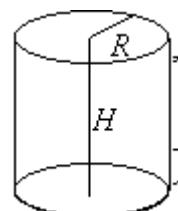
где S_1, S_2 – площади оснований.

10.5. Цилиндр

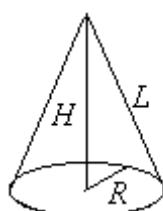
Объем: $V = \pi R^2 H$.

Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = 2\pi R H$.

Площадь полной поверхности: $S = 2\pi R H + 2\pi R^2$.



10.6. Конус



$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

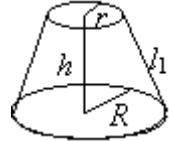
Объем:

$$\text{Площадь полной поверхности: } S = \pi R(L + R)$$

10.7. Усеченный конус

$$V = \frac{1}{3} \pi h(R^2 + Rr + r^2)$$

Объем:



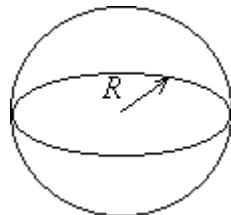
Площадь полной поверхности:

$$S = \pi l_1(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$$

10.8. Сфера и шар

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Объём шара:



где R – радиус сферы (шара).

$$\text{Площадь сферы: } S = 4\pi R^2$$