Задачник

Далее решим задачи, предложенные на сайте http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2.

Анонсировано 5228 задач, но мы уже решили топик "Алгебра" и предложенные в нем 4423 задачи, так что нет причин для паники.

Действуем по старой схеме – примеры с номерами, содержащими буквы латинского алфавита, будем откладывать (подвергнем такие задачи рассмотрению в конце); те задачи, которые похожи друг на друга и которых много, будем решать подробно.

Джендубаев Эдуард, 16 июля 2014 года.

ВНИМАНИЕ!!!

Разумеется, моя работа содержит ошибки в предложенных решениях. Задача читателя состоит в том, чтобы их отыскать и решить правильно все задачи. Без ошибок было бы не интересно, а зная, что они есть, вы будете тщательнее проверять свои решения – самосовершенствоваться.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!

Уравнения и неравенства

От начала страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=2 и до конца страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=27 под номерами 10001, 10003, ..., 10513 (всего 257) следуют достаточно простые задачи на нахождение x.

Неизвестная переменная находится в одно действие для примеров вида

$$a \cdot x = b, \qquad x = \frac{b}{a}$$

и в несколько (не более трех действий) для примеров вида

$$\frac{x+a}{x+b} = c, \ \ x = \frac{bc-a}{1-c}.$$

Задание №10001

Найдите корень уравнения $-\frac{3}{4}x = 22\frac{1}{2}$.

Решение.

Основная трудность заключается в обращении с дробями. Не спеша и внимательно переводим их в неправильные и делим одну на другую.

$$x = \frac{22 \cdot 2 + 1}{2} : \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{45 \cdot 4}{2 \cdot 3} = -15 \cdot 2 = -30.$$

Ответ: –30.

Задание №10145

Найдите корень уравнения $\frac{5}{7}x = 4\frac{2}{7}$.

Решение.

$$x = 4\frac{2}{7} : \frac{5}{7} = \frac{4 \cdot 7 + 2}{7} \cdot \frac{7}{5} = \frac{30}{5} = 6.$$

Ответ: 6.

Задание №10151

Найдите корень уравнения $\frac{x-119}{x+7} = -5$.

Решение.

Можно действовать по-разному: перенести –5 вправо, привести слагаемые к общему знаменателю, получить уравнение вида *дробь=0*, сказать, что знаменатель в ноль не обращается и решить уравнение *числитель=0* или сразу умножить обе части равенства на знаменатель, перенести слагаемые с x в одну сторону, просто числа – в другую, а затем поделить и найти x.

Я же просто воспользуюсь формулой, указанной выше.

$$x = \frac{7 \cdot (-5) - (-119)}{1 - (-5)} = \frac{-35 + 119}{6} = 14.$$

Ответ: 14.

Задание №10513

Найдите корень уравнения $\frac{x-70}{x-2} = 5$.

Решение.

$$x = \frac{(-2)\cdot 5 - (-70)}{1-5} = -\frac{60}{4} = -15.$$

Ответ: –15.

Я позволю себе разобрать только 4 примера из 257, поскольку они чертовски легкие.

Если, не приведи Пифагор, у кого-то возникают сложности в решении таких задач, советую каждый день без помощи посторонних предметов, в уме составлять и решать подобные задачи, штук по 125 каждые 3-4 часа.

От конца страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=27 и до начала страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=32 под номерами 106893, 106895, ..., 106981 (всего 45) представлены задачи на последовательные вычисления, связанные с процентами. Много подобных задач рассмотрено в топике "Алгебра".

Задание №106893
В 2008 году в городском квартале проживало 40000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 1%, а в 2010 году — на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

Решение.

Последовательно решаем.

2009: 40000 + 40000 * 0,01 = 40400.

2010: 40400 + 40400 * 0,09 = 44036.

Ответ: 44036.

Задание №106981
В 2008 году в городском квартале проживало 60000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 5%, а в 2010 году — на 5% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

Решение.

2009: 60000 + 60000 * 0,05 = 63000.

2010: 63000 + 63000 * 0,05 = 66150.

Ответ: 66150.

Комментарии излишни.

От конца страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=32 и до начала страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=128 под номерами 18287, 18289, ..., 18697; 18743, 18745, ..., 18829; 24281, 24283, ..., 25529; 2553, 2555, ..., 2633 (всего 916) представлены ранее встреченные в разделе "Алгебра" задачи. Это простые примеры с таблицей или рисунком на простые вычисления, основанные на логике поставленного вопроса.

Никаких трудностей, кроме невнимательного прочтения часто громоздкого условия и неправильного понимания вопроса здесь нет.

На экзамене у вас очень много времени. Читайте условие задачи много раз, пока не поймете всю суть дальнейшего решения от начала и до конца.

Лучший отдых – смена деятельности.

От начала страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=128 и до середины страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=129 под номерами 2635, 2637, ..., 2657 (всего 12) следуют уравнения с логарифмом в два действия.

Предлагается найти x в уравнении вида

$$\log_a(b+x)=c, \quad x=a^c-b.$$

Для решения достаточно вспомнить определение логарифма (или основное логарифмическое тождество)

$$a^{\log_a b}=b, \qquad a>0, a\neq 1, b>0.$$

Задание №2635
Найдите корень уравнения $\log_2(4-x)=7.$

Решение.

$$x=-(2^7-4)=-(128-4)=-124.$$

Ответ: –124.

Задание №2657
Найдите корень уравнения $\log_6(3-x)=2.$

Решение.

$$x=-(6^2-3)=-(36-3)=-33.$$

Ответ: –33.

От середины страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=129 и до конца страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=131 под номерами 26578 – 26600 (всего 23) следуют задачи на составление уравнений (математических моделей). Их уже вполне можно отнести к трудным задачам. Далеко невеселым является факт, что очень многие не могут решать подобные задачи из-за неуверенности и необъяснимого страха.

Часто решающий относится к подобным примерам с пренебрежением, считая, что работа над задачей не займет много усилий, а ответ лежит на поверхности. Это заблуждение – к задаче нужно отнестись со всей ответственностью и вниманием.

Задание №26578
Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 24 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 16 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Удобно обозначить через x искомую скорость первого автомобиля.

Формул для решение задач на движение немного и они совершенно понятны. Если s – расстояние (путь, пройденный путь, дистанция), v – скорость, t – время, то

$$s = v \cdot t, \qquad v = \frac{s}{t}, \qquad t = \frac{s}{v}.$$

Попытаемся записать значимые фразы условия в математической форме. Про первый автомобиль всё должно быть ясно.

Второй проехал первую половину пути со скоростью 24 км/ч – $t_{21} = \frac{s}{2} : 24 = \frac{s}{48}$.

...а вторую половину пути – со скоростью, на 16 км/ч большей скорости первого –

$t_{22} = \frac{s}{2} : (x + 16) = \frac{s}{2x+32}$.

...в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем – $t_{21} + t_{22} = t_1$.

Теперь у нас есть всё, для того чтобы записать уравнение времени

$$\frac{s}{48} + \frac{s}{2x + 32} = \frac{s}{x}.$$

Прежде чем что-либо делать с дробями, просто необходимо избавиться от неизвестной, находить которую нам не нужно и которая нам уже не понадобится. Поделим обе части равенства на s.

$$\frac{1}{48} + \frac{1}{2x + 32} = \frac{1}{x}.$$

Дальше можно действовать по-разному – либо умножить обе части равенства на общий знаменатель для всех трех дробей, либо выполнить действие в левой части, а затем сделать "умножение крест на крест". Я выбираю первый способ.

Понятно, что общий знаменатель для всех участвующих дробей выглядит так

$$48 \cdot (2x + 32) \cdot x.$$

Умножим на него обе части равенства

$$(2x+32)\cdot x+48\cdot x=48\cdot(2x+32).$$

$$2x^2+32x+48x=96x+48\cdot 32.$$

$$2x^2-16x-48\cdot 32=0.$$

$$x^2-8x-24\cdot 32=0.$$

Мне не хочется решать квадратное уравнение, я знаю теорему Виета и уравнение выше записано в таком удобном виде, что 32 + (–24) = –(–8).

Ответ: 32.

Задание №26600
Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 375 литров она заполняет на 10 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объемом 500 литров?

Решение.

По сути, используемые формулы и логика абсолютно совпадают с предыдущей задачей. Только скоростью или *пропускной способностью* в этот раз мы назовем величину, которая будет измеряться в литрах в минуту – л/мин, расстояние естественно заменим на объем воды в литрах, обозначим буквой w. За x обозначим искомую величину.

Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая – $v_1=x-5$.

...если резервуар объемом 375 литров она (вторая труба) заполняет на 10 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объемом 500 литров – $\frac{w_2}{x}+10=\frac{w_1}{x-5}$, где w_1=500, w_2=375.

Получим уравнение

$$\frac{375}{x}+10=\frac{500}{x-5}.$$

Угадать x не получается, будем решать.

$$\frac{375+10x}{x}=\frac{500}{x-5}.$$

$$500x=375x+10x^2-5\cdot 375-50x.$$

$$10x^2-175x-5\cdot 375.$$

$$2x^2-35x-375=0.$$

Тут уже ситуация безвыходная, придется решать уравнение.

$$D=35^2+4\cdot 2\cdot 375=4225=65^2.$$

Очевидно, выбрать надо положительный корень, поскольку участвующие величины не могут быть отрицательными.

$$x=\frac{35+65}{2\cdot 2}=25.$$

Ответ: 25.

Я осмелюсь предположить, что мы в дальнейшем еще встретим задачи на составление уравнений. Также будем подробно уделять внимание именно правильности составления уравнения, логике и степени очевидности способа составления математической модели.

Холодные руки – горячее сердце.

От начала страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=132 и до конца страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=134 под номерами 26616 – 26645 (всего 30) представлены задачи, которые мы решали в разделе "Алгебра". Там примеры на проценты, нахождение ближайшего большего/меньшего или четного/нечетного целого, простые действия.

Эту надпись видят только красавчики, которые сдадут ЕГЭ по математике успешно.

От начала страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=135 и до середины страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=137 под номерами 26646 – 26671 (всего 25) представлены различные уравнения – логарифмические, показательно-степенные, тригонометрические, квадратные – однако решение их гораздо менее страшное, чем название.

Задание №26648

Найдите корень уравнения $\log_5(5-x)=\log_5 3$.

Решение.

Всё очень просто – поскольку основания логарифмов одинаковые, значит можно перейти к равенству выражений, от которых логарифм по этому основанию берётся.

$$5-x=3, \qquad x=2.$$

Ответ: 2.

Задание №26655

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-7}=3$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-7}=(3^{-2})^{x-7}=3^{14-2x}.$$

$$3^{14-2x}=3.$$

$$14-2x=1, \quad x=6{,}5.$$

Ответ: 6,5.

Задание №26665

Найдите корень уравнения $x=\frac{6x-15}{x-2}$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответ укажите больший из них.

Решение.

Сразу отметим, что $x=2$ не является корнем уравнения.

$$x\cdot(x-2)=6x-15, \qquad x^2-2x-6x+15=0, \qquad x^2-8x+15=0.$$

$$D=8^2-4\cdot15=64-60=4=2^2, \quad x_1=\frac{8-2}{2}=3, \quad x_2=\frac{8+2}{2}=5.$$

Ответ: 5.

Задание №26669

Найдите корень уравнения $\cos\frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}$.

В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

Решение.

Пока ничто не предвещает беды, мы уверены в том, что эта задача несложная.

$$\frac{\pi(x-7)}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$x - 7 = \pm 1 + 6n, \ \ n \in \mathbb{Z}.$$

$$x = 7 \pm 1 + 6n, \ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Последнее можно записать в виде совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x = 8 + 6n, \ \ n \in \mathbb{Z}, \\ x = 6 + 6n, \ \ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Теперь остается пробовать различные понятное дело отрицательные $n \in \mathbb{Z}$ и смотреть, где наибольший отрицательный корень.

$$n = -1: \quad x_1 = 8 - 6 = 2, \quad x_2 = 6 - 6 = 0.$$

Никакой из корней не отрицательный, идем дальше.

$$n = -2: \ \ x_1 = 8 - 12 = -4, \ \ x_2 = 6 - 12 = -6.$$

Итак, первые отрицательные корни получаются при $n = -2$. Очевидно, при дальнейшем уменьшении n будут уменьшаться и корни, а нам нужен наибольший отрицательный.

Из чисел –4 и –6 наибольшим отрицательным является число –4.

А задача-то оказалась совершенно непростой. Будьте внимательны и вдумчиво читайте каждое слово из условия.

Ответ: –4.

От конца страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=137 и до середины страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=146 под номерами 26672 – 26690; 2669, 2671, ..., 2795 (всего 83) представлены ранее разобранные в разделе "Алгебра" задачи с табличной информацией или рисунком, а также разобранные уже в этом разделе простые (3 действия) уравнения с логарифмом или степенью.

–Пусть счастливо завершаться все ваши начинания и... Ну и так далее!

От середины http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=146 и до середины страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=191 под номерами 27953 – 28014; 28015, 28017, ..., 28709 (всего 410) представлены интересные задачи, которые можно назвать сложными.

Здесь представлена формула со многими параметрами, просят выразить какой-нибудь из них и вычислить значение при заданных числах.

Или вопрос заключается в работе с квадратичной функцией.

Внимание здесь стоит уделить единицам измерения участвующих параметров и тем единицам, в которых просят выразить ответ к задаче. Но самое главное – **логика процесса решения**.

Читателю может показаться, что в таких примерах есть большая доля физики. Это действительно так, но если вы не знаете физику, причин для паники всё равно нет. Вы просто должны обладать нормальным мышлением и не пугаться незнакомых слов. Ведь что такое физика, как не математика именованных разными красивыми и не очень словами переменных?

Задание №27953
При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t°) = l_0(1 + \alpha \cdot t°)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}(°C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, $t°$ — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Решение.

Логика такова – удлинение это разность длин рельса после охлаждения и до охлаждения. Обязательно миллиметры переведем в метры

$$l(t°) - l_0 = 0{,}003.$$

Но найти нам надо температуру, выразим её.

$$l_0(1 + \alpha \cdot t°) - l_0 = 0{,}003.$$

$$l_0 + l_0 \cdot \alpha \cdot t° - l_0 = 0{,}003.$$

$$t° = \frac{0{,}003}{\alpha \cdot l_0}.$$

Подставляем представленные

$$t° = \frac{0{,}003}{10 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5}} = 25.$$

Ответ: 25.

Задание №27959
В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{50}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

Решение.

Вопрос задачи запишется следующим образом (помним, что объем цилиндра $V = \pi \cdot r^2 \cdot H$)

$$V(t) = \frac{1}{4}V_0, \qquad \pi r^2 H(t) = \frac{1}{4}\pi r^2 H_0, \qquad H(t) = \frac{1}{4}H_0.$$

Как и ожидалось, неизвестные величины (введенные только для порядка) исчезли.

$$H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2 = \frac{1}{4}H_0.$$

$$\frac{10}{2} \cdot \frac{1}{2500} \cdot t^2 - \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 20} \cdot \frac{1}{50} \cdot t + \frac{3}{4} \cdot 20 = 0.$$

$$\frac{1}{500} \cdot t^2 - \frac{2}{5} \cdot t + 15 = 0.$$

$$t^2 - 200t + 7500 = 0.$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 1000 - 7500 = 2500 = 50^2.$$

$$x_1 = 50, \;\; x_2 = 150.$$

Понятно, что оба корня в ответ указать нельзя, но непонятно, какой из них исключить – они оба положительные и являются *хорошими* числами.

На самом деле просто нужно понять, что за результат мы получили.

Четверть от начального объёма останется в баке через 50 секунд после открытия крана.

Четверть от начального объёма останется в баке через 150 секунд после открытия крана.

Это нас и спасает, теперь ответ становится понятным, ведь если уже через 50 секунд произошло то, что нам нужно, а именно уровень воды **снизился** до $\frac{1}{4}H_0$, то и запишем это значение в ответ. Потому что дальше попросту происходит магия – бак, опустев через какое-то время, вновь начинает наполняться и уже спустя 150 секунд **повышающийся** уровень воды во второй раз достигнет отметки в $\frac{1}{4}H_0$ м.

Ограничением для нас и указанием к выбору правильного корня является здравый смысл – а через сколько секунд воды в баке не останется вовсе? Решив соответствующее уравнение

$$t^2 - 200t + 10000 = 0$$

ожидаемо получаем **единственный** ответ 100 секунд. Итак, бак опустеет через 100 секунд, а значит ответ 150 не подходит. Казалось бы, всего лишь квадратичная функция, а сколько в ней хитрости!?

Я буду очень рад, если для многих читателей ответ на эту задачу был очевиден.

Ответ: 50.

Надеюсь, такие задачи испугали и заинтересовали читателя. Ввиду проявившей себя громоздкости решения и собственной лени, я позволю себе нагло оставить решенными лишь 2 задачи из 410.

Таю надежду на то, что это побудит многих решать эти задачи самостоятельно – иду на риск.

Если и вы пали под натиском лени и страха перед подобными задачами, можете смело идти подметать соседнюю улицу – дворники тоже нужны стране, дальше заниматься подготовкой к ЕГЭ по математике смысла никакого нет.

Шутки шутками, но на самом деле подобные задачи просто жизненно необходимы. Смотрите – страшное, громоздкое условие с запутанными формулами, противными числами и некрасивыми единицами измерения – чем не идеальный рецепт для какой-нибудь мошеннической схемы по затаскиванию вас в кредитную пропасть или налоговую бездну? Как в последней разобранной задаче, ваш, скажем, долг за квартиру сначала будет уменьшаться, потом вы его вроде как погасили, а потом вновь начинаете выплачивать!

Неумение решать такие задачи – пусть это займет всё экзаменационное время, но вы должны её решить – таит в себе чудовищную опасность.

Конечно, выход есть – решать до потери пульса. Если и после решения тысячи подобных задач останется неуверенность, проверенный метод поведения на экзамене – оставить эту задачу под конец.

Дорогу осилит идущий.

От середины страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=191 и до конца страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=219 под номерами 2871, 2873, ..., 3381 (всего 256) представлены хорошо знакомые нам уравнения с логарифмом, радикалом, степенью – которые в литературе принято называть простейшими.

Подобные задачи должны решаться уверенно, в каждой не более трех-четырех простых действий.

Задание №2871

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{15-x} = 16$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{15-x} = 16,\ \ (2^{-1})^{15-x} = 2^4,\ \ 2^{x-15} = 2^4,\ \ x - 15 = 4,\ \ x = 19.$$

Ответ: 19.

Задание №2899

Найдите корень уравнения $16^{x-9} = \frac{1}{2}$.

Решение.

$$16^{x-9} = \frac{1}{2},\ \ (2^4)^{x-9} = 2^{-1},\ \ 2^{4x-36} = 2^{-1},\ \ 4x - 36 = -1,\ \ x = \frac{35}{4} = 8{,}75.$$

Ответ: 8,75.

Задание №2997

Найдите корень уравнения $\sqrt{15 - 2x} = 3$.

Решение.

$$\sqrt{15 - 2x} = 3,\ \ 15 - 2x = 9,\ \ 2x = 6,\ \ x = 3.$$

Ни о какой ОДЗ здесь речи нет, поэтому такое уравнение называется простейшим.

Ответ: 3.

Задание №3089

Найдите корень уравнения $\log_7(6 + x) = 2$.

Решение.

$$\log_7(6 + x) = 2,\ \ 6 + x = 7^2,\ \ x = 49 - 6,\ \ x = 43.$$

Ответ: 43.

Задание №3141

Найдите корень уравнения $\log_4(x + 3) = \log_4(4x - 15)$.

Решение.

$$\log_4(x + 3) = \log_4(4x - 15)\,,\ \ x + 3 = 4x - 15,\ \ 3x = 18,\ \ x = 6.$$

Ответ: 6.

От начала страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=220 и до середины страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=276 под номерами 39009, 39011, ..., 40125 (всего 559) располагаются ранее встреченные задачи на составление математической модели – уравнения – в условиях к которым есть *автомобили, велосипедисты, пункты А и В, пристани, моторные лодки, теплоходы, трубы, рабочие* и т.д. Задачи можно отнести к сложным.

Задание №39009
Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 26 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 39 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Обозначим весь путь буквой s, время в пути первого автомобиля t_1, второго – $t_2=t_{21}+t_{22}$, искомую скорость первого автомобиля x, тогда скорость второго автомобиля на второй половине пути запишется как $x + 39$. По условию, автомобили прибыли в пункт B одновременно, что даёт нам основание записать уравнение относительно x как равенство времён в пути двух автомобилей.

$$t_1 = t_2,\ \ t_1 = t_{21} + t_{22},\ \ \frac{s}{x} = \frac{s}{2 \cdot 26} + \frac{s}{2 \cdot (x+39)}.$$

Избавляемся от s, переносим всё в одну сторону.

$$\frac{x+39+26}{2 \cdot 26 \cdot (x+39)} - \frac{1}{x} = 0, \quad x^2 + 13x - 2 \cdot 26 \cdot 39 = 0, \quad x^2 + 13x - 12 \cdot 13 \cdot 13 = 0.$$

$$D = 13^2 + 48 \cdot 13^2 = (7 \cdot 13)^2, \quad x_1 = 39, \quad x_2 = -52.$$

Разумеется, нам нужен только положительный корень.

Ответ: 39.

Задание №39055
Из A в B одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 9 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 84 км/ч, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 40 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2 \cdot (x-9)} + \frac{1}{2 \cdot 84}, \quad x^2 - 93x + 2 \cdot 9 \cdot 84 = 0.$$

$$D = 93^2 - 72 \cdot 84 = 2601 = 51^2, \quad x_1 = 21, \quad x_2 = 72.$$

Известно, что скорость первого автомобилиста больше 40 км/ч.

Ответ: 72.

Задание №39101
Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 25 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 1 час 40 минут позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

1 час 40 мин = $1\frac{2}{3}$ часа.

$$\frac{60}{x+25}=\frac{60}{x}-1\frac{2}{3},\quad x^2+25x-25\cdot 36=0,\quad D=25^2+4\cdot 36\cdot 25=25\cdot 169=65^2.$$

$$x_1=-45,\quad x_2=20.$$

Ответ: 20.

Задание №39177
Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 204 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 5 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 5 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

$$\frac{204}{x}=\frac{204}{x+5}+5,\quad x^2+5x-204=0,\quad D=25+816=841=29^2,\quad x_1=-17,\quad x_2=12.$$

Ответ: 12.

Задание №39259
Два велосипедиста одновременно отправились в 104-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 5 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 5 часов раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

$$\frac{104}{x}=\frac{104}{x-5}-5,\quad x^2-5x-104=0,\quad D=25+416=441=21^2,\quad x_1=-8,\quad x_2=13.$$

Ответ: 13.

Задание №39351
Моторная лодка прошла против течения реки 221 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 15 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

$$\frac{221}{15-x}-\frac{221}{15+x}=4,\quad 2x^2+221x-2\cdot 15\cdot 15=0,\quad D=229^2,\quad x_1=-112{,}5,\quad x_2=2.$$

Ответ: 2.

Задание №39375
Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 551 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 24 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 53 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

$$\frac{551}{24+x}+\frac{551}{24-x}+5=53,\quad \frac{2\cdot 24\cdot 551}{24^2-x^2}=48,\quad x^2=24^2-551=25,\quad x_1=-5,\quad x_2=5.$$

Ответ: 5.

Задание №39445
От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 165 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 4 часа после этого следом за ним, со скоростью на 4 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

$$\frac{165}{x}=\frac{165}{x+4}+4,\quad x^2+4x-165=0,\quad x_1=-15,\quad x_2=11.$$

Ответ: 11.

Задание №39571
Заказ на 255 деталей первый рабочий выполняет на 2 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 2 детали больше?

Решение.

$$\frac{255}{x+2}+2=\frac{255}{x},\quad x^2+2x-255=0,\quad x_1=-17,\quad x_2=15.$$

Ответ: 15.

Задание №39697
На изготовление 609 деталей первый рабочий тратит на 8 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 667 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 6 деталей больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

Решение.

$$\frac{609}{x}+8=\frac{667}{x-6},\quad 4x^2-53x-609\cdot 3=0,\quad D=179^2,\quad x_1=-15{,}75,\quad x_2=29.$$

Ответ: 29.

Всё-таки с категорическим замечанием по поводу ненужности здесь никаких особых знаний физики я погорячился, прошу прощения.

Задание №39751
Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 4 дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за 3 дня?

Решение.

Обозначим через A работу, x – производительность (скорость выполнения работы, (единица работы)/день) первого рабочего, y – производительность второго рабочего, B – какая-то часть работы.

Требуют от нас найти значение выражения A/x.

В наших терминах, система выглядит так

$$\begin{cases} \dfrac{A}{x+y} = 12, \\ \dfrac{B}{x} = 4, \\ \dfrac{B}{y} = 3. \end{cases}$$

Последние два уравнения дают возможность выразить y через x.

$$y = \frac{4}{3}x.$$

Подставим полученный результат в первое уравнение системы.

$$\frac{A}{x + \frac{4}{3}x} = 12, \quad \frac{A}{x} = 28.$$

Решение выглядит жутко непонятным, согласен. Зато оно правильное и порядочное.

Ответ: 28.

Задание №39801
Первая труба пропускает на 8 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 240 литров она заполняет на 8 минут дольше, чем вторая труба?

Решение.

$$\frac{240}{x} = \frac{240}{x+8} + 8, \quad \frac{30}{x} = \frac{30}{x+8} + 1, \quad x^2 + 8x - 30 \cdot 8, \quad x_1 = -20, \quad x_2 = 12.$$

Ответ: 12.

Задание №39945
Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 696 литров она заполняет на 6 минут дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 667 литров?

Решение.

$$\frac{696}{x} - \frac{667}{x+5} = 6, \quad 6x^2 + x - 5 \cdot 696 = 0, \quad x_1 = -\frac{145}{6}, \quad x_2 = 24.$$

Ответ: 24.

Задание №40055

Пристани A и B расположены на озере, расстояние между ними равно 234 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из A в B. На следующий день после прибытия она отправилась обратно со скоростью на 4 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 8 часов. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость баржи на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Никакой скорости течения нет, потому что мы сейчас на озере.

$$\frac{234}{x} = \frac{234}{x+4} + 8, \quad x = 9.$$

Ответ: 9.

По поводу таких задач хочется сказать несколько замечаний.

Во время решения, у меня очень часто возникали ошибки касаемо места времени отставания того или иного фигуранта задачи. В результате я получал уравнение с отрицательным дискриминантом. Если и у вас вдруг возникнет та же проблема, проверьте правильность написания исходного уравнения, на слова *позже, раньше, быстрее, одновременно* обратите внимание. Вы должны чётко представлять себе, в каких случаях и от чего нужно отнимать или к чему прибавлять ту или иную величину отставания или опережения.

Ошибку в записи уравнения можно увидеть, если посмотреть на участвующие дроби. Всегда можно определить, какая из них больше, а какая меньше. Часто у них одинаковый числитель. Напомню, что из дробей с одинаковым числителем больше та, знаменатель которой меньше. Понятное дело, что для корректного решения задачи в последнем записанном уравнении восьмерка должна быть со знаком +, потому что дробь в левой части очевидно больше дроби справа.

Не хочется говорить про какие-то хитрости или уловки, хочется взрастить порядочных решателей задач, которые с уважением и серьезностью подходят к каждому примеру и не бояться умножать четырехзначные числа.

И всё-таки, если речь идет о скорости течения реки, скорости велосипедиста, скорости баржи, скорости плота, то, как правило, это число находится в районе 10 км/ч. Записав уравнение по задаче **правильно**, можно попробовать угадать искомое число.

Кстати, практически все дроби в уравнении дают целые числа при подстановке неизвестного. Имеет смысл, раз уж начали гадать, разложить числитель на множитель опять-таки в районе 10-20. Может повезет.

Правильно записанное уравнение всегда даёт хороший дискриминант, являющийся квадратом целого числа – это можно предвидеть, зная требование к форме ответа на подобную задачу: число со знаком или без, записанное в десятичной форме с конечной дробной частью и без незначащих нулей. Трудность в том, что оно часто трехзначное. Поэтому получив 83521 не спешите ставить на себе крест, постарайтесь найти, квадратом какого целого числа оно является. Или же, не доходя до дискриминанта, попытайтесь применить теорему Виета, может будет легче.

Такие задачи очень изнуряющие, потому что много долгих умножений и трудностей, не связанных с самой целью подобных примеров – научиться правильно составлять математическую модель.

Безусловно имеете право оставить на экзамене эту задачу на конец, но обязательно к ней вернуться.

–Тебя забавляют мои страдания?

–Меня забавляют любые страдания, кроме своих. Я – француз, ха-ха!

От середины страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=276 и до конца страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=321 под номерами 40137, 40139, ..., 41045 (всего 455) следуют задачи на наилучший выбор из предполагаемых. Информация представлена в виде таблицы, рисунка или просто текста. Эти задачи были разобраны подробно и обстоятельно в разделе "Алгебра", мы их уже решали – выбирали лучший тариф, более дешевый фундамент для дома, самую выгодную поездку на такси и т.д.

–Но он как-то наткнулся на камень преткновения всех мужчин.

–Что это за камень?

–И правда, что это?

–Море?

–Алгебра?

–Дихотомия добра и зла?

–Бабы.

Чтобы алгебра ни для кого не была камнем преткновения, ура! Ура! Ура!

От конца страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=321 и до конца страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=366 под номерами 41089, 41091, ..., 41989 (всего 451) находятся задачи на работу с формулами, где просят найти значение одного из параметров при особых условиях. Мы уже с ними встречались, и тогда я себя повел просто омерзительно, разобрав всего лишь 2 задачи. Постараюсь реабилитироваться.

Задание №41089
При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 18$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t°) = l_0(1 + \alpha \cdot t°)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}(°C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, $t°$ — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 8,1 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Решение.

Удлинение это изменение длины, а изменение это разность между конечной и начальной величиной.

$$l(t°) - l_0 = 0{,}0081, \quad l_0 + l_0 \cdot \alpha \cdot t° - l_0 = 8{,}1, \quad t° = \frac{0{,}0081}{l_0 \cdot \alpha} = 37{,}5.$$

Ответ: 37,5.

Задание №41119
Некоторая компания продает свою продукцию по цене p=400 руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют v=200 руб., постоянные расходы предприятия f=700000 руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q)=q(p-v)-f$. Определите месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 600000 руб.

Решение.

Выразим q из формулы и подставим имеющиеся числа, благо единицы везде одни и те же.

$$q = \frac{\pi(q) + f}{p - v} = \frac{600000 + 700000}{400 - 200} = 6500.$$

Ответ: 6500.

Задание №41179
После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h=5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 1,1 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,1 с? Ответ выразите в метрах.

Решение.

Найдем от мальчика до воды в колодце до дождя

$$h_0 = 5 \cdot (1{,}1)^2 = 6{,}05.$$

Понятно, что при увеличении уровня воды в колодце (а именно об этом идет речь в задаче) расстояние от мальчика до уровня воды в колодце будет уменьшаться, а значит и время падения камешка будет уменьшаться. Иными словами, требуется найти разность расстояний от мальчика до воды в колодце до дождя и при времени падения 1,1–0,1 = 1 сек.

$$h_0 - h(1) = 6{,}05 - 5 = 1{,}05.$$

Ответ: 1,05.

Задание №41199

Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q=85-5p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p)=q\cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 350 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Решение.

Заметим, что единица тыс. руб. нигде не меняется. Уравнение запишется следующим образом

$$q\cdot p\ge 350,\quad 85p-5p^2\ge 350,\quad p^2-17p+70\le 0.$$

Становится понятным, что нам нужно найти наибольший корень (*наибольшую цену*) уравнения

$$p^2-17p+70=0,\quad p_1=7,\quad p_2=10.$$

Ответ: 10.

Задание №41315

Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t)=2+11t-5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 8метров?

Решение.

Вопрос можно переиначить: какова длина интервала решений следующего неравенства?

$$2+11t-5t^2\ge 8.$$

Чтобы найти длину интервала решений неравенства, достаточно взять модуль разности корней уравнения.

$$5t^2-11t+6=0,\quad x_1=1,\quad x_2=1{,}2,\quad |1-1{,}2|=0{,}2.$$

Ответ: 0,2.

Задание №41343
Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right)$, где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте g=10м/с2). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 211,6 см? Ответ выразите в м/с.

Решение.

Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть **равной нулю**.

Ну теперь-то всё понятно. Надо приравнять имеющуюся формулу к нулю и найти что требуется.

$$m\left(\frac{v^2}{L} - g\right) = 0, \quad \frac{v^2}{L} - g = 0, \quad v = \sqrt{gL} = \sqrt{10 \cdot 2{,}116} = 4{,}6.$$

Абсолютно логично то, что если мы будем уменьшать скорость вращения ведёрка, вода будет выливаться – хоть сейчас идите и проверьте: возьмите ведёрко с ручкой, налейте в него воды примерно на четверть всего объема, привяжите веревку к ручке и начинайте медленно раскачивать получившийся маятник в вертикальной плоскости. Вы почувствуете, когда нужно будет резко усилиться – будет считаться за активный перерыв и отдых.

Что-то я увлёкся.

Ответ: 4,6.

Задание №41363
В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, H_0=20 м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{900}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте g=10 м/с2). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

Решение.

Мы уже решали эту задачу и знаем что делать. Корня уравнения будет два, потому что функция уровня воды является квадратичной. Однако мы понимаем, что через определенное время (этот момент времени единственен снова-таки благодаря квадратичной функции и **логике**) бак опустеет – после этого момента мы прекращаем всяческие отношения с этой загадочной функцией уровня воды. Не отыскивая специально момент, когда же воды не останется, просто скажем себе, что надо взять меньший положительный корень.

Вопрос задачи запишется следующим образом (помним, что объем цилиндра $V = \pi \cdot r^2 \cdot H$)

$$V(t) = \frac{1}{4}V_0, \qquad \pi r^2 H(t) = \frac{1}{4}\pi r^2 H_0, \qquad H(t) = \frac{1}{4}H_0.$$

Как и ожидалось, неизвестные величины (введенные только для порядка) исчезли.

$$H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2 = \frac{1}{4}H_0.$$

$$t^2 - 4 \cdot 900t + 3 \cdot 900^2 = 0, \quad x_1 = 900, \quad x_2 = 2700.$$

Ответ: 900.

Задание №41423
Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой $y=ax^2+bx$, где $a = -\frac{1}{400}$ $м^{-1}$, $b = \frac{3}{8}$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

Решение.

Задача непростая. Понятно, что камни летят по *параболической* траектории (или просто по дуге) в честь графика функции, которой эта траектория задаётся – *параболы*.

$$y \geq 1 + 8, \qquad x^2 - 3 \cdot 50x + 72 \cdot 50 \leq 0, \quad 30 \leq x \leq 120.$$

Если камнеметательная машина будет расположена от стены на расстоянии в указанных пределах, условие задачи выполнится. Ответом же будет наибольшее значение, 120.

Вы должны представлять у себя в голове, что если расположить машину на расстоянии 30, то камень улетит на максимальное расстояние от стены – атакуем издали, а если расположить машину на расстоянии 120, то камень улетит на минимальное расстояние у стены – атакуем уже осаждающего крепость вплотную неприятеля.

Ответ: 120.

Задание №41473
Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры от времени работы: $T(t)=T_0+bt+at^2$, где t — время в минутах, T_0=1220 К, a=–20 К/мин^2, b=200 К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1400 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

Решение.

$$T(t) = 1400, \quad t^2 - 10t + 9 = 0, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 9.$$

Результат выглядит следующим образом: через 1 минуту температура прибора станет 1400 К и продолжит увеличиваться, достигнет какого-то максимума, а через 9 минут после включения вновь достигнет 1400 К, но уже уменьшаясь.

Вроде бы ответ 9 надо уже давно записать в бланк ответов, потому что это наибольший из корней, однако это не так. Ведь сказано, что после достижения температуры в 1400 К элемент может испортиться и никто не дает гарантии, что он переживет какой-то пик температуры, затем начнет охлаждаться, снова достигнет температуры 1400 К и тогда-то его и отключим. Нет, **логика** и житейский опыт подсказывают, что здесь нужно отключить прибор во избежание дальнейшего нагревания, т.е. через 1 минуту после включения.

Ответ: 1.

Задание №41499
Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 45°$ /мин — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 6°$ /мин^2 — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 1350°. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

Решение

$$\varphi = 1350, \quad t^2 + 15t - 450 = 0, \quad t_1 = -30, \quad t_2 = 15.$$

Здесь никаких вопросов нет.

Ответ: 15.

Задание №41527
Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью v_0=58 км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением a=8 км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S=v_0t+at^2/2$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 30 км от города. Ответ выразите в минутах.

Решение.

$$S \le 30, \quad 2t^2+29t-15=0, \quad t_1=-15, \quad t_2=0{,}5.$$

Здесь не идет речь о длине интервала решений неравенства. Вопрос поставлен чётко: через какое время мотоциклист отдалится от города на 30 км с момента времени t=0? Осталось 0,5 часа перевести в минуты.

Ответ: 30.

Задание №41571
Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью v_0=23 м/с, начал торможение с постоянным ускорением a=2 м/с^2. За t секунд после начала торможения он прошел путь $S=v_0t-at^2/2$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 132 метра. Ответ выразите в секундах.

Решение.

$$S=132, \quad t^2-23t+132=0, \quad t_1=11, \quad t_2=12.$$

Если рассматривать график функции S, то можно увидеть, что отметку 132 он пересечет дважды, причем нас интересует ближайший к отметке t=0 случай. Осталось перевести ответ в секунды.

Ответ: 660.

Задание №41637
Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой m=7 кг и радиуса R=4 см, и двух боковых с массами M=4 кг и с радиусами $R+h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в кг·см2, даётся формулой $I=\frac{(m+2M)R^2}{2}+M(2Rh+h^2)$. При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения 156кг·см^2? Ответ выразите в сантиметрах.

Решение.

$$I \le 156, \quad h^2+8h-9 \le 0, \quad -9 \le h \le 1.$$

Ответ: 1.

Задание №41693
На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \rho g l^3$, где l — длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9{,}8$ Н/кг). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 2817460,8 Н? Ответ выразите в метрах.

Решение.

$$F_A \leq 2817460{,}8, \quad \rho g l^3 \leq 2817460{,}8, \quad l = \sqrt[3]{\frac{2817460{,}8}{1000 \cdot 9{,}8}} = 6{,}6.$$

Формула и идея довольно просты, а вот числа и вычисление кубического корня в высшей степени неприятны. Под кубическим корнем получается число 287,496, которое можно представить в виде 287496:1000. Теперь будем делить 287496 на маленькие числа и смотреть, что получится, ведь мы убеждены, что из числа извлекается кубический корень нацело. 287496:2=143748, 143748:2=71874, 71874:2=35937. Дальше замечаем, что сумма цифр получившегося числа делится на 3, значит само число делится на 3 без остатка. 35937:3=11979, снова можем поделить на 3, 11979:3=3993. Вновь (уже ожидаемо, потому что извлечение кубического корня, простые множители должны повторится кратное трём число раз) делим на 3, 3993:3=1331. Получили куб числа 11, итого $287496 = (2*3*11)^3 = 66^3$.

Ответ: 6,6.

Задание №41793
Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды, $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды, а T — температура. Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $1/8 \cdot 10^{20}$ м^2, а мощность её излучения равна $2{,}9184 \cdot 10^{27}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в градусах Кельвина.

Решение.

$$P = 2{,}9184 \cdot 10^{27}, \quad T = \sqrt[4]{\frac{2{,}9184 \cdot 10^{27}}{5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{8} \cdot 10^{20}}} = 800.$$

Ситуация абсолютно идентична предыдущей. Но вы не должны бояться, а помнить, что ответ на подобную задачу должен быть *красивым*, а значит смело делите 29184 на 57!

Ответ: 800.

Задание №41847
Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием f=60 см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 100до 120 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 120 до 140 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Решение.

$$\frac{1}{d_1}=\frac{1}{60}-\frac{1}{d_2}.$$

Величины d_1 будет тем меньше, чем больше величина обратная, т.е. $\frac{1}{d_1}$. Прекрасно видно, что чем меньше $\frac{1}{d_2}$, тем больше $\frac{1}{d_1}$ (и, как отмечалось, меньше d_1).

Ну, а величина $\frac{1}{d_2}$ в свою очередь будет наименьшей при максимально возможном значении d_2, т.е. при $d_2=140$. Остаётся подставить это значение в формулу и найти d_1.

$$d_1=\frac{140\cdot 60}{140-60}=105.$$

Ответ: 105.

Задание №41897
Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой f_0=447 Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v)=\frac{f_0}{1-\frac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука в звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее, чем на 3 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а c=315 м/с. Ответ выразите в м/с.

Решение.

Частота второго гудка будет больше частоты первого, потому что в формуле первый гудок делится на положительное число меньше единицы (т.е. умножается на число большее 1). Тогда

$$f(v)-f_0\geq 3,\quad \frac{447}{1-\frac{v}{315}}\geq 450,\quad v\geq 2{,}1.$$

Ответ: 2,1.

Задание №41957
По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I=\frac{\varepsilon}{R+r}$, где ε — ЭДС источника (в вольтах), r=3 Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 4% от силы тока короткого замыкания $I_{кз}=\frac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в омах.)

Решение.

$$I\leq 0{,}04I_{кз},\quad \frac{\varepsilon}{R+r}\leq 0{,}04\frac{\varepsilon}{r},\quad R\geq 72.$$

Ответ: 72.

От начала страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=368 и до конца страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=379 под номерами 5383, 5385, ..., 5613 (всего 116) предложены задачи на наилучший выбор, информация в которых содержит таблицу или рисунок. Мы такие примеры решали в разделе "Алгебра".

От конца страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=379 и до конца страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=399 под номерами 5615, 5617, ..., 6005 (без 5859 всего 195) представлены хорошо знакомые задачи на составление уравнений

Задание №5967

Байдарка в 10:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт A в 16:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки 2 км/ч.

Решение.

Время в пути от A до B: $\frac{15}{x+2}$.

Время в пути от B до A: $\frac{15}{x-2}$.

Полное время всего путешествия: 16 – 10 = 6.

Важный момент состоит в том, что нам совершенно неважно, на каком именно участке – от A к B или от B к A – байдарка двигалась по течению, а на каком – против.

$$\frac{15}{x+2} + \frac{15}{x-2} + 1\frac{1}{3} = 6, \qquad x_1 = -0{,}5, \qquad x_2 = 7.$$

Ответ: 7.

От конца страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=399 и до конца страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=416 под номерами 6191, 6193, ..., 6335; 6379, 6381, ..., 6397; 77053, 77055, ..., 77151; 77331 – 77365 (всего 168) следуют задачи на проценты, округление, выбор ближайшего большего, меньшего, четного, нечетного целого. Мы решали их в разделе "Алгебра".

От начала страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=417 и до конца страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=418 под номерами 77366 – 77384 (всего 19) следуют уже встречавшиеся нам простейшие уравнения с радикалами, степенями, логарифмами и тригонометрическими функциями. Задачи решались в 3-4 действия.

От конца страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=418 и до середины страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=493 под номерами 77503, 77505, ..., 79053 (всего 776) следуют задачи на проценты, округление, выбор ближайшего большего, меньшего, четного, нечетного целого и простые действия. Мы решали их в разделе "Алгебра".

От начала страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=495 и до середины страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=518 под номерами 9651, 9653, ..., 9999; 99565 – 99621 (всего 232) следуют знакомые задачи на различные темы. В примерах просят найти корень уравнения (решается в одно действие). Есть задачи на *сплавы*, *проценты*, ближайшее большее, меньшее, четное, нечетное целое. Выборочно решим некоторые из них.

Впервые была встречена задача на *арифметическую прогрессию*.

Задание №99573
Смешали 4 литра 15-процентного водного раствора некоторого вещества с 6 литрами 25-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение.

Количество вещества в растворе найдется умножением величины его *концентрации* на весь объем раствора.

$$\frac{4 \cdot 0{,}15 + 6 \cdot 0{,}25}{4 + 6} = 0{,}21.$$

Концентрацию просят выразить в процентах, значит надо умножить её на 100.

Смешивая растворы разных концентраций (или сплавы) мы не можем получить раствор, концентрация которого будет больше максимальной концентрации растворов-слагаемых.

Ответ: 21.

Задание №99574
Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 20 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

Решение.

Изюм всё же не до конца высушенный виноград. Если высушить виноград до конца, останется 10% от его первоначальной массы. Если высушить изюм, останется 95% уже от первоначальной массы изюма.

Полученные величины равны. Тогда масса винограда найдется

$$\frac{20 \cdot (1 - 0{,}05)}{1 - 0{,}9} = 190.$$

Ответ: 190.

Задание №99575
Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Решение.

Если x – масса первого сплава, y – масса второго, то требуется найти значение выражения $y - x$.

$$\begin{cases} 0{,}1x + 0{,}3y = 0{,}25 \cdot 200, \\ x + y = 200, \end{cases} \qquad x = 50, \quad y = 150, \quad y - x = 100.$$

Ответ: 100.

Задание №99579
Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

Решение.

Вспоминаем арифметическую прогрессию, ведь именно о ней здесь и идет речь. Вот необходимая формула.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Известно, что $a_1 + a_n = 60$, а найти просят n.

$$n = \frac{2S}{a_1 + a_n} = 8.$$

Я имею сильное подозрение, что без знания формулы суммы n -членов арифметической прогрессии эту задачу мы бы не решили.

Ответ: 8.

Задание №9959

Найдите корень уравнения $-\frac{3}{4}x = -7\frac{1}{2}$.

Решение.

$$-\frac{3}{4}x = -7\frac{1}{2}, \quad x = 10.$$

Ответ: 10.

Задание №99595
Два пешехода отправляются одновременно в одном направлении из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,5 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 300 метрам?

Решение.

Пешеходы отдаляются друг от друга (а именно про это и спрашивают) со скоростью, равной модулю разности их собственных скоростей. Действительно, если скорости у пешеходов, движущихся *в одну сторону*, будут равны, то они не будут отдаляться друг от друга.

$$|v_1 - v_2| \cdot t = 0{,}3, \qquad t = 0{,}2.$$

Не забываем перевести результат в минуты.

Ответ: 12.

Задание №99600
Часы со стрелками показывают 8 часов 00 минут. Через сколько минут минутная стрелка в четвертый раз поравняется с часовой?

Решение.

Задача может обескуражить при первом прочтении, но только не нас, мы уже тёртые калачи.

Понятно, что это задача на движение, только фигуранты дела в этот раз не охотно идут на сделку со следствием.

За 12 часов (720 минут) часовая стрелка обойдёт весь циферблат и вернется в исходное положение.

Минутная стрелка *пройдет* тот же *путь* за 60 минут, т.е. в 12 раз быстрее часовой стрелки.

Введем единицу измерения скорости обеих стрелок – угол (в градусах) / минута.

Пусть теперь скорость часовой стрелки $v = \frac{360°}{720} = 0{,}5°/\text{мин}$, скорость минутной стрелки $12v = 6°/\text{мин}$.

Решим вспомогательную задачу, а именно ответим на вопрос, через какое время стрелки поравняются, если начинали они свое движение из одной позиции? Каждому должно быть очевидно, что минутная стрелка преодолеет путь, равный

$$360° + vt_0,$$

где t_0 есть искомое время, а vt_0 есть путь, который за это время пройдет часовая стрелка.

Скорость минутной стрелки нам известна, тогда

$$\frac{360° + vt}{12v} = t_0, \quad t_0 = \frac{720}{11}.$$

В нашей задаче, стрелки начинают движение из разных позиций, часовая указывает на 8, минутная – на 12 – между ними сейчас *расстояние* в (12 – 8)30=120 градусов. Время, через которое стрелки поравняются, стартуя со своих позиций, мы найдем аналогично вспомогательной задаче.

$$\frac{(360° - 120°) + vt}{12v} = t, \quad t = \frac{480}{11}.$$

Итак, первый раз после начала движения, стрелки поравняются через $\frac{480}{11}$ минуты. А чтобы ответить на вопрос задачи, осталось прибавить к этому времени $3t_0$.

$$t + 3t_0 = \frac{480 + 3 \cdot 720}{11} = \frac{2640}{11} = 240.$$

На самом деле мы сейчас проделали восхитительную работу и получили вполне серьезные результаты.

Шутка или нет, но теперь перед походом на ЕГЭ по математике будем гадать, какие брать часы. На одну руку надеть со стрелками, на другую – с электронным дисплеем. ☺

Ответ: 240.

Сам себя не похвалишь – никто не похвалит.

Задание №99614
Один мастер может выполнить заказ за 12 часов, а другой — за 6 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

Решение.

Это классика

$$\frac{1}{\frac{1}{12}+\frac{1}{6}}=4.$$

Ответ: 4.

Становится очевидным, что не только физику, но и естествознание в целом нужно знать. Мы встречали задачи и на сплавы, и на погружения куда-то, и на эффект Доплера, и на закон Ома, и на силу Архимеда, и на линзы, и на концентрацию вещества, и на стрелки, и на банковские вклады, и на курсы валют, и на движения по течению, и на ядерный распад. Очень много различных физических процессов и экспериментов описывались в задачах.

Если читатель возмутился таким требованиям, ведь написано, что экзамен по математике, а не физике, то скорее всего, этот читатель падший троечник.

Учитесь в школе хорошо по всем предметам, и будет вам счастье.

Искушение сдаться будет особенно сильным за миг до победы.

От конца страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=518 и до конца страницы http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=518 следуют примеры, на которые я нажимал "отложить".

Также, белые вороны встречались многократно в процессе ознакомления с разделом "Уравнения и неравенства".

Среди отложенных задач явно были задачи высокого и повышенного уровней, части С. Здесь их публиковать я не буду.

Большинство же отложенных задач мы давно умеем решать.

****

Теперь поговорим о проделанной работе.

Разобрали мы с вами 5017 задач с учётом тех, что мы еще решили в разделе "Алгебра".

Также были отложены 184 задачи и встречены 79 ранее отложенных задач из раздела "Алгебра".

Итого 5280, опять я где-то дал маху, если в разделе "Уравнения и неравенства" анонсировано 5228 задач.

Ошибка составила

$$\frac{5280-5228}{5228} \approx 0{,}009946.$$

Некоторые из ошибок ФИПИ

http://opengia.ru/items/41571 не метров правильно, а 132 метра.

http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2?page=357 поверхности пишется с буквой р.

Благодарю всех, кто читал, если такие есть.

Джендубаев Эдуард, 18 июля 2014 года.

****

Я надеюсь, что вы посетили сайт http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/2 и увидели внизу страницы мелким шрифтом "Использование материалов открытого банка в коммерческих целях запрещено". Поэтому, я не имею никакого права ни у кого просить вознаграждения. В то же время, любой труд должен быть оплачен ☺. Мой телефон +7 963 170 43 67. Дальше вы знаете, что делать.